**REPUBLIK INDONESIA**
**KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA**

# SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Menteri Hukum dan Hak Asasi Manusia Republik Indonesia, berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta yaitu Undang-Undang tentang perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra (tidak melindungi kekayaan intelektual lainnya), dengan ini menerangkan bahwa hal-hal tersebut di bawah ini telah tercatat dalam Daftar Umum Ciptaan:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | Nomor dan tanggal permohonan | : | C22201700160, 24 Januari 2017 |
| II. | Pencipta | | |
| | Nama | : | **1. HASAN DJIDU;**<br>**2. JAILANI, DR., MP.** |
| | Alamat | : | Jalan Gajahmada No.81 Rt.002 Rw.001, Kel. Lamangga Kec. Murhum, Kota Baubau, Sulawesi Tenggara. |
| | Kewarganegaraan | : | Indonesia |
| III. | Pemegang Hak Cipta | | |
| | Nama | : | **1. HASAN DJIDU;**<br>**2. JAILANI, DR., MP.** |
| | Alamat | : | Jalan Gajahmada No.81 Rt.002 Rw.001, Kel. Lamangga Kec. Murhum, Kota Baubau, Sulawesi Tenggara. |
| | Kewarganegaraan | : | Indonesia |
| IV. | Jenis Ciptaan | : | Buku |
| V. | Judul Ciptaan | : | **MODEL PEMBELAJARAN KALKULUS SMA BERBASIS MASALAH UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI SISWA** |
| VI. | Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia | : | 31 Juli 2016, di Yogyakarta |
| VII. | Jangka waktu perlindungan | : | Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung hingga 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia. |
| VIII. | Nomor pencatatan | : | 085029 |

Pencatatan Ciptaan atau produk Hak Terkait dalam Daftar Umum Ciptaan bukan merupakan pengesahan atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang dicatat. Menteri tidak bertanggung jawab atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang terdaftar. (Pasal 72 dan Penjelasan Pasal 72 Undang-undang Nomor 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta)

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
REPUBLIK INDONESIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL
u.b.
DIREKTUR HAK CIPTA DAN DESAIN INDUSTRI

Dr. Dra. Erni Widhyastari, Apt., M.Si.
NIP. 196003181991032001


## Model Pembelajaran Kalkulus SMA Berbasis Masalah

Model pembelajaran kalkulus berbasis masalah (MPK-BM) adalah model pembelajaran yang diadaptasi dan dikembangkan dari model pembelajaran berbasis masalah. MPK-BM dikembangkan dengan berlandaskan paradigma konstruktivisme dengan tujuan untuk meningkatkan kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa. Model pembelajaran kalkulus SMA berbasis masalah (MPK-BM) ini pada dasarnya memiliki karakteristik yang sama dengan model pembelajaran berbasis masalah atau biasa juga dikenal dengan Problem-Based Learning (PBL).

Buku ini memuat kerangka konseptual dan petunjuk operasional pelaksanaan MPK-BM, yang terdiri dari lima bab: (1) Kerangka Konseptual Model Pembelajaran; (2) Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi; (3) Model Pembelajaran Kalkulus Berbasis Masalah; (4) Petunjuk Operasional Pelaksanaan Pembelajaran; dan (5) Ruang Lingkup Materi Kalkulus.

Penulis juga menyertakan contoh RPP dan LKS untuk memudahkan pembaca dalam memahami operasional pelaksanaan model pembelajaran ini. Setelah mencermati isi buku ini, diharapkan akan memberikan tambahan informasi terkhusus bagi para guru dalam merencanakan pembelajaran berbasis masalah serta mengimplementasikannya dengan baik di kelas, tidak hanya untuk materi kalkulus, tetapi juga pada materi pelajaran lainnya.

Parama Publishing
Jalan Sadewa No. 1
Sorowajan Baru Yogyakarta
Telp. 0812 2815 3789

ISBN 978-602-6243-63-8

Hasan Djidu
Jailani

Model Pembelajaran Kalkulus SMA Berbasis Masalah

# MODEL PEMBELAJARAN KALKULUS SMA BERBASIS MASALAH

Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Siswa

Hasan Djidu & Jailani

*Hasan Djidu & Jailani*

# MODEL PEMBELAJARAN KALKULUS SMA BERBASIS MASALAH

## Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Siswa

*Konseptual & Operasional Pelaksanaan di Kelas*

Parama Publishing

# Model Pembelajaran Kalkulus SMA Berbasis Masalah
## Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Siswa
*Konseptual & Operasional Pelaksanaan di Kelas*


| | | |
|---|---|---|
| **Penulis** | : | **Hasan Djidu & Jailani** |
| **Editor** | : | Venti Indiani |
| **Ukuran** | : | 160 mm x 230 mm |
| **Jumlah Halaman** | : | vi + 225 halaman |
| **Cetakan** | : | Pertama, Desember 2017 |
| **Desain Sampul** | : | Ezi Apino (apinoezi@gmail.com) |
| **Layout** | : | Hasan Djidu (hasandjidu@gmail.com) |

**ISBN** : 978-602-6243-63-8

Diterbitkan

**PARAMA PUBLISHING**

# Kata Pengantar

Puji syukur atas limpahan Rahmat, Taufik, Dan Hidayah yang diberikan Allah Azza Wa Jalla sehingga penulis dapat menyelesaikan buku berjudul "*Model Pembelajaran Kalkulus SMA Berbasis Masalah: untuk Melatih Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Siswa*". Buku ini adalah salah satu produk dari hasil penelitian payung dengan judul "*Pengembangan Model Pembelajaran Berbasis Masalah untuk Meningkatkan HOTS dan Karakter*".

Buku ini berisi penjelasan mengenai model pembelajaran kalkulus SMA berbasis masalah (MPK-BM) dan operasional pelaksanaannya yang terdiri dari lima bab: (1) kerangka konseptual model pembelajaran; (2) kemampuan berpikir tingkat tinggi; (3) model Pembelajaran kalkulus berbasis masalah; (4) petunjuk operasional pelaksanaan pembelajaran; dan (5) ruang lingkup materi kalkulus. Model pembelajaran kalkulus SMA berbasis masalah (MPK-BM) ini pada dasarnya memiliki karakteristik yang sama dengan model pembelajaran berbasis masalah atau biasa juga dikenal dengan Problem-Based Learning (PBL). Untuk memudahkan pembaca dalam memahami operasional pelaksanaan model pembelajaran ini, penulis juga memasukkan contoh RPP dan LKS yang juga dikembangkan sesuai dengan MPK-BM ini. Setelah mencermati isi buku ini, diharapkan akan memberikan tambahan informasi terkhusus bagi para guru dalam merencanakan pembelajaran inovatif serta mengimplementasikannya dengan baik di kelas, tidak hanya untuk materi kalkulus, tetapi juga pada materi lainnya, atau bahkan pada mata pelajaran lainnya.

Ucapan terimakasih tidak lupa penulis haturkan kepada Dr. Heri Retnawati, Dr. Sugiman, M. Si, Dr. Rasmuin Baco Minu, dan Drs. Anwar M.Pd yang telah menelaah perangkat pembelajaran serta memberikan saran maupun kritik dalam pengembangan model pembelajaran ini. Ucapan terimakasih juga penulis sampaikan kepada kepala sekolah dan guru matematika SMAN 2 Baubau yang telah memfasilitasi kegiatan ujicoba model pembelajaran, dan kepada semua pihak yang telah memberi sumbangan pemikiran, saran, maupun kritik selama proses penulisan buku ini. Akhirnya, dengan senantiasa memohon perlindungan kepada Allah Azza Wa Jalla, semoga buku ini berguna bagi pembaca, serta memberi kontribusi positif untuk kemajuan dunia pendidikan Indonesia. Amin.

Yogyakarta, 31 Juli 2017

Tim Penulis

# Daftar Isi


**Kata Pengantar** ..... ii
**Daftar Isi** ..... iii
**Daftar Tabel** ..... v
**Daftar Gambar** ..... vi
**1. Kerangka Konseptual Model Pembelajaran** ..... 1
Urgensi Mengembangkan Model Pembelajaran ..... 1
Pengertian Model Pembelajaran Menurut Beberapa Pakar ..... 1
Komponen-Komponen Model Pembelajaran ..... 2
*Sintaks Model Pembelajaran* ..... 4
*Sistem Sosial Model Pembelajaran* ..... 4
*Prinsip Reaksi Model Pembelajaran* ..... 4
*Sistem Pendukung Model Pembelajaran* ..... 5
*Dampak Penerapan Model Pembelajaran* ..... 6
**2. Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi** ..... 8
Pengertian Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi ..... 8
Karakteristik Berpikir Tingkat Tinggi ..... 9
Aspek-aspek Berpikir Tingkat Tinggi ..... 10
Melatih Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Siswa ..... 12
**3. Model Pembelajaran Kalkulus Berbasis Masalah (MPK-BM)** ..... 15
Model Pembelajaran Berbasis Masalah ..... 15
Model Pembelajaran Kalkulus Berbasis Masalah ..... 16
Sintaks (langkah-langkah) MPK-BM ..... 20
*Menyajikan Masalah* ..... 20
*Mengorganisasikan Siswa untuk Belajar* ..... 21
*Mengidentifikasi dan Merumuskan Masalah* ..... 22
*Menyelidiki dan Menyelesaikan Masalah* ..... 22
*Menyajikan Penyelesaian Masalah* ..... 23
*Mengevaluasi dan Menarik Kesimpulan* ..... 24
Sistem Sosial MPK-BM ..... 25
Prinsip Reaksi MPK-BM ..... 26
Sistem Pendukung MPK-BM ..... 27
Dampak Penerapan MPK-BM ..... 28
*Dampak Langsung MPK-BM* ..... 29
*Dampak Tidak Langsung MPK-BM* ..... 29
**4. Petunjuk Operasional Pelaksanaan MPK-BM** ..... 30
Penerapan Sintaks MPK-BM ..... 30
Penerapan Sistem Sosial dalam MPK-BM ..... 34
Penerapan Prinsip Reaksi dalam MPK-BM ..... 36
*Prinsip Reaksi Guru saat Memfasilitasi Proses Berpikir* ..... 36

*Prinsip Reaksi Guru saat Menjelaskan/ Memberikan Informasi* ................. 37
Menyiapkan Sistem Pendukung MPK-BM ........................................ 38
*Contoh Masalah yang diberikan dalam Pembelajaran* .............................. 39
**5. Ruang Lingkup Materi Kalkulus SMA ......................................... 41**
Ruang Lingkup Materi Kalkulus SMA ................................................ 41
Memahami Limit Fungsi secara Intuitif ............................................. 41
*Konsep Limit Menggunakan Persegi Satuan* ............................................ 42
*Konsep Limit dengan Pendekatan Numerik dan Grafis* ............................. 42
*Limit kiri dan Limit Kanan* .......................................................................... 44
*Aturan untuk menyelesaikan limit di tak hingga* ......................................... 47
*Menentukan Limit Fungsi secara Analitis* .................................................. 48
*Strategi Menentukan Limit Fungsi* .............................................................. 51
*Teorema Apit* ............................................................................................ 55
*Limit Tak Hingga* ....................................................................................... 57
*Sifat-sifat Limit Tak Hingga* ....................................................................... 60
Turunan Fungsi ........................................................................... 61
*Turunan Fungsi Aljabar* ............................................................................. 61
*Definisi Turunan Fungsi* ............................................................................. 64
*Jenis dan Sifat Turunan Fungsi* .................................................................. 67
*Turunan Fungsi Trigonometri* ..................................................................... 70
*Turunan Fungsi Komposisi (Aturan Rantai)* ............................................... 71
*Persamaan Garis Singgung Kurva* ............................................................. 72
Aplikasi Turunan Fungsi ................................................................ 73
*Fungsi Naik dan Fungsi Turun* ................................................................... 73
*Interval Fungsi Naik dan Fungsi Turun* ...................................................... 74
*Titik Stasioner suatu Fungsi dan Jenis-jenis Ekstrim* ................................ 75
*Nilai Maksimum dan Minimum Suatu Fungsi dalam Interval Tertutup* ....... 79
*Menggambar Grafik Fungsi Aljabar* ........................................................... 82
*Aplikasi Turunan dalam Pemecahan Masalah* ........................................... 85
*Perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi (Dalil L'Hopital)* .......................... 88
Integral Fungsi ............................................................................... 89
*Notasi Integral* ........................................................................................... 91
*Sifat-sifat Integral Tak Tentu* ...................................................................... 92
*Integral Tak Tentu Hasil Kali Fungsi dengan Konstanta* ............................ 93
*Integral Jumlah dan Selisih Fungsi-Fungsi* ................................................ 94
*Integral Fungsi Trigonometri* ...................................................................... 95
*Menyelesaikan Masalah Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar* ....................... 96
**Daftar Pustaka ............................................................................ 100**
**Lampiran 1 (Contoh RPP MPK-BM) ............................................ 102**
**Lampiran 2 (Contoh LKS MPK-BM) ............................................. 173**

# Daftar Tabel

Tabel 1. Kegiatan Belajar dalam MPK-BM ................................................ 17
Tabel 2. Aspek HOTS yang Dilatih Melalui MPK-BM ................................ 25
Tabel 3. Implementasi Sara Pata Anguna dalam MPK-BM ...................... 35
Tabel 4.Contoh Pertanyaan untuk Memfasilitasi Siswa dalam MPK-BM .. 37

# Daftar Gambar

Gambar 1. Contoh Soal untuk Mengukur Kemampuan Analisis ................ 11
Gambar 2. Contoh Soal untuk Mengukur Kemampuan Evaluasi............... 12
Gambar 3. Contoh Soal untuk Mengukur Kemampuan Sintesis................ 12
Gambar 4. Penataan Meja Siswa dalam MPK-BM .................................... 28
Gambar 5. Siswa Duduk Saling Berhadapan ............................................. 32
Gambar 6. Siswa Melakukan Presentasi di Depan Kelas .......................... 33
Gambar 7. Siswa berkolaborasi untuk Menyelesaikan Masalah................ 34
Gambar 8. Guru Mengontrol dan Membantu Siswa yang Kesulitan .......... 34

# Bab 1

# Kerangka Konseptual Model Pembelajaran

## Urgensi Mengembangkan Model Pembelajaran

Pendidikan merupakan salah satu komponen penting bagi kemajuan suatu bangsa. Oleh karena itu, inovasi dalam bidang pendidikan sangat dibutuhkan untuk mendukung kemajuan bangsa tersebut. Selain itu, kualitas pendidikan yang baik menentukan kualitas sumber daya manusia di suatu negara. Salah satu inovasi bidang pendidikan yang telah dilakukan oleh pemerintah Indonesia adalah dengan melakukan evaluasi dan pembaharuan kurikulum. Pada tahun 2013, pemerintah Indonesia menerapkan kurikulum 2013 (K-13) pada jenjang sekolah dasar dan menengah. Implementasi kurikulum tersebut akan berjalan optimal apabila didukung oleh guru yang profesional mengimplementasikan kurikulum. Profesionalitas seorang guru merupakan salah satu faktor penentu kualitas pendidikan (Rusman, 2012). Oleh karena itu, guru perlu melakukan perubahan-perubahan dalam pembelajaran agar sesuai dengan tuntutan kurikulum (Ahmadi & Amri, 2014). Sementara itu, Elliot, Beddow, Kurz, *et. al* (2011) mengemukakan bahwa idealnya guru menciptakan lingkungan pembelajaran yang dapat memberikan kesempatan bagi siswa untuk mempelajari suatu pengetahuan sekaligus keterampilan. Lebih lanjut, Ahmadi & Amri (2014) mengemukakan bahwa guru harus mampu memilih model pembelajaran yang sesuai dengan materi yang diajarkan.

## Pengertian Model Pembelajaran Menurut Beberapa Pakar

Model pembelajaran merupakan salah satu istilah yang sering dan akrab bagi seorang guru dalam perencanaan pembelajaran. Beberapa pakar telah banyak menjelaskan definisi dari model pembelajaran itu sendiri serta komponen-komponen yang termuat di dalamnya. Berikut ini beberapa pendapat ahli mengenai model pembelajaran.

Joyce, Weil & Calhoun (2009) mendefinisikan model pembelajaran adalah suatu rancangan yang mendeskripsikan lingkungan pembelajaran yang memuat aktivitas-aktivitas yang harus dilakukan seorang guru dalam suatu proses pembelajaran. Joyce, Weil & Calhoun (2009) menambahkan bahwa model pembelajaran memiliki banyak kegunaan yang menjangkau segala bidang pendidikan, mulai dari perencanaan pembelajaran dan kurikulum hingga perancangan materi-materi pembelajaran termasuk multimedia.

Gunter, Estes & Scwhab (2003) mendefinisikan model pembelajaran adalah "… *a step-by-step procedure that lead to specific learning outcomes*". Model pembelajaran menurut pendapat tersebut didefinisikan sebagai langkah-langkah atau prosedur operasional yang digunakan seorang guru dalam proses pembelajaran. Langkah-langkah pembelajaran tersebut dituangkan dalam perencanaan pembelajaran yang kemudian akan diimplementasikan ke dalam proses pembelajaran untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diharapkan.

Sementara itu, Eggen & Kauchak (2012) menjelaskan bahwa model mengajar atau model pengajaran adalah cetak biru (*blueprint*) yang digunakan sebagai alat untuk membantu guru menjadikan pengajaran mereka sistematis dan efisien. Selanjutnya, pendapat lain dikemukakan oleh Suprijono (2015) yang menjelaskan bahwa model pembelajaran adalah landasan praktik pembelajaran hasil penurunan teori psikologi pendidikan dan teori belajar yang dirancang berdasarkan analisis terhadap implementasi kurikulum dan implikasinya pada tingkat operasional di kelas.

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa suatu model pembelajaran adalah kerangka konseptual, yang direncanakan oleh guru, yang menggambarkan seluruh komponen dalam kegiatan pembelajaran mulai dari awal hingga akhir yang melukiskan prosedur dalam mengorganisasikan pengalaman belajar. Model pembelajaran juga berfungsi sebagai pedoman bagi guru dalam merencanakan dan melaksanakan aktivitas pembelajaran di kelas untuk mencapai tujuan pembelajaran yang telah ditentukan. Dalam model pembelajaran tergambar jelas, langkah-langkah yang harus dilakukan selama proses pembelajaran, dan tujuan apa yang hendak dicapai pada akhir proses pembelajaran tersebut.

## Komponen-Komponen Model Pembelajaran

Dalam upaya mengembangkan suatu model pembelajaran, kita perlu mengetahui apa saja komponen penyusun model pembelajaran tersebut.

setelah mengetahui komponen-komponennya, kita juga perlu mengetahui untuk siapa model pembelajaran akan diberikan dan untuk membelajarkan materi pelajaran apa. Dengan demikian, setiap komponen model pembelajaran yang dikembangkan sesuai dengan materi pelajaran yang akan diberikan dan juga cocok dengan siswa yang akan menerima atau belajar pada materi tersebut.

Komponen model pembelajaran dapat dikembangkan dengan merujuk pendapat beberapa ahli. Gunter, Estes & Scwhab (2003) mengemukakan bahwa model pembelajaran memiliki dua komponen utama, yaitu langkah-langkah pembelajaran (*step-by-step procedure*), dan tujuan pembelajaran yang ingin dicapai (*specific learning outcomes*). Sementara itu, Arends (Trianto, 2014) menjelaskan bahwa model pembelajaran mencakup empat komponen utama, yaitu tujuan (*goals*), sintaks (*syntax*), lingkungan (*environment*), dan sistem pengelolaan (*management system*). Pendapat lain dikemukakan oleh Eggen & Kauchak (2012) yang menyebutkan bahwa model pembelajaran atau model mengajar memiliki tiga ciri utama, yaitu tujuan yang dirancang untuk menciptakan pemahaman mendalam tentang materi dan pemikiran kritis, fase, yaitu serangkaian langkah-langkah yang bertujuan untuk membantu siswa mencapai tujuan pembelajaran yang spesifik, dan fondasi, yaitu teori dan penelitian yang mendukung model tersebut. Selanjutnya, Joyce, Weil, & Calhoun (2009) menyatakan bahwa suatu model pembelajaran dapat dianalisis sesuai dengan empat konsep inti operasional yang mencirikan suatu model pembelajaran, yaitu: sintaks (langkah-langkah pembelajaran yang memuat urutan aktivitas guru dan siswa), sistem sosial (peran dan hubungan siswa dengan guru), prinsip reaksi (cara guru memandang dan merespon siswa terhadap apa yang dilakukan), dan sistem pendukung (persyaratan dan dukungan apa yang diperlukan). Selain itu, terdapat komponen lain, yaitu tujuan dan asumsi, serta dampak pengiring pembelajaran.

Berdasarkan beberapa pendapat tersebut, terdapat beberapa kesamaan dalam mendefinisikan komponen maupun ciri suatu model pembelajaran. Pertama, seluruh pendapat di atas menunjukkan bahwa suatu model pembelajaran harus memiliki sintaks (langkah-langkah) pembelajaran. Kedua, suatu model pembelajaran harus memiliki tujuan sebagaimana yang disebutkan oleh Joyce, Weil & Calhoun sebagai dampak pembelajaran. Sementara itu, Arends mengemukakan bahwa model pembelajaran harus memiliki lingkungan pembelajaran (environment) dan sistem pengelolaan (*management system*) yang juga memiliki kesamaan dengan sistem sosial, prinsip reaksi, dan sistem pendukung sebagaimana yang dikemukakan oleh Joyce, Weil & Calhoun. Selanjutnya, model pembelajaran harus memiliki rasional teoritik yang mendasari model pembelajaran tersebut. Dari beberapa pendapat yang dikemukakan di atas, komponen model yang dikemukakan oleh Joyce, Weil & Calhoun memenuhi seluruh komponen model yang dikemukakan oleh ketiga pendapat lainnya.

Adapun pengembangan model pembelajaran pada buku ini mengacu pada komponen pembelajaran yang dikemukakan oleh Joyce, Weil & Calhoun yang meliputi sintaks (langkah-langkah) pembelajaran, sistem sosial, prinsip reaksi, sistem pendukung, dan dampak pembelajaran. Untuk lebih memahami mengenai komponen-komponen tersebut berikut dijelaskan setiap komponen model pembelajaran.

### *Sintaks Model Pembelajaran*

Sintaks dalam pembelajaran merupakan langkah-langkah, urutan/ fase dalam kegiatan pembelajaran yang merupakan deskripsi implementasi model di lapangan. Langkah-langkah kegiatan pembelajaran ini secara spesifik memuat urutan-urutan aktivitas guru dan siswa dalam proses pembelajaran. Sintaks pembelajaran juga diharapkan dapat mempermudah guru dalam melaksanakan pembelajaran (Retnawati, 2015). Langkah-langkah pembelajaran tersebut tertuang dalam Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP).

### *Sistem Sosial Model Pembelajaran*

Sistem sosial menyatakan peran dan hubungan antara siswa dan guru serta norma-norma yang berlaku. Disamping itu, implementasi suatu model pembelajaran dapat menggunakan nilai-nilai budaya lokal. Nilai-nilai budaya yang dimaksudkan di sini tidak terletak pada konten masalah yang digunakan, akan tetapi pada hubungan atau interaksi sosial antar siswa maupun siswa dengan guru. Pemilihan nilai-nilai budaya ke dalam sistem sosial pembelajaran ini memiliki tujuan untuk meningkatkan apresiasi siswa terhadap nilai budaya lokal sekaligus dapat meningkatkan hasil belajar siswa (Alexon & Sukmadinata, 2010).

### *Prinsip Reaksi Model Pembelajaran*

Joyce, Weil dan Calhoun (2009) mengemukakan bahwa prinsip reaksi adalah hal -hal yang berkaitan dengan cara guru memperhatikan dan memperlakukan siswa, termasuk bagaimana guru memberikan respon terhadap pertanyaan, jawaban, tanggapan, atau apa yang siswa lakukan. Prinsip reaksi guru pada suatu model pembelajaran yang berkaitan dengan tanggapan terhadap pertanyaan atau terkait dengan hambatan dan kesulitan yang dihadapi siswa dalam menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan dapat dikembangkan dengan membuat daftar pertanyaan sebagai bentuk *scaffolding* (bantuan) untuk mengarahkan siswa.

### *Sistem Pendukung Model Pembelajaran*

Sistem pendukung diperlukan agar model pembelajaran dapat terlaksana secara praktis dan efektif. Sistem pendukung mendeskripsikan kondisi-kondisi yang mendukung yang seharusnya diciptakan atau dimiliki oleh guru dalam menerapkan model pembelajaran. Sistem pendukung dalam model pembelajaran dapat berupa ketersediaan fasilitas tempat belajar, perangkat belajar, hingga media maupun peralatan atau teknologi yang dibutuhkan. Sistem pendukung dalam suatu model pembelajaran harus disesuaikan dengan kebutuhan. Artinya perangkat pendukung yang digunakan pada satu model pembelajaran dengan model pembelajaran lainnya tidak selalu sama. Pada umumnya sistem pendukung yang berupa

Pada umumnya, sistem pendukung model pembelajaran yang harus dikembangkan oleh guru berupa perangkat pembelajaran dapat berupa Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), Lembar Kegiatan Siswa (LKS), atau dapat pula mengembangkan sumber-sumber belajar. Format Penulisan RPP biasanya merujuk pada peraturan yang dikeluarkan pemerintah. Hal-hal yang berkaitan dengan Standar Kompetensi (SK) hingga indikator pembelajaran dipengaruhi oleh peraturan atau kurikulum yang diberlakukan. Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) memiliki perbedaan dengan kurikulum 2013. Pada Peraturan Menteri Pendidikan Nasional (Permendiknas) nomor 41 tahun 2007 bahwa komponen-komponen yang harus tercakup dalam RPP dalam KTSP antara lain:

(1) Identitas mata pelajaran,
(2) Standar kompetensi,
(3) Kompetensi dasar,
(4) Indikator pencapaian kompetensi,
(5) Tujuan pembelajaran,
(6) Materi ajar,
(7) Alokasi waktu,
(8) Metode pembelajaran,
(9) Kegiatan pembelajaran (pendahuluan, inti, penutup),
(10) Penilaian hasil belajar, dan
(11) Sumber belajar.

Selain itu, dalam penyusunan rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP) juga perlu diperhatikan beberapa prinsip, yaitu: (1) memperhatikan perbedaan individu, (2) mendorong partisipasi aktif siswa, (3) mengembangkan budaya membaca dan menulis, (4) memberikan umpan balik dan tindak lanjut, (5) keterkaitan dan keterpaduan, (6) menerapkan teknologi informasi dan komunikasi.

Sementara itu, terkait dengan Lembar Kegiatan Siswa (LKS), Majid (2012: 176) mengemukakan bahwa “lembar kegiatan siswa (*students work sheet*) adalah lembaran-lembaran berisi tugas yang harus dikerjakan oleh peserta didik”. (McArdle, 2010) menjelaskan bahwa “*the worksheet is a way of organizing a picture of the training activity that becomes an important part of your module and lesson design*”. Adanya LKS akan memudahkan guru dalam melaksanakan pembelajaran, dan memudahkan siswa belajar secara mandiri dan belajar memahami dan menjalankan suatu tugas tertulis.

Biasanya format pada LKS menyesuaikan dengan kegiatan pembelajaran yang akan dilakukan oleh siswa. Ketentuan mengenai format, maupun jenis kegiatan dalam LKS tidak diatur secara khusus dalam suatu kurikulum. Artinya guru dapat berinovasi mengembangkan LKS sesuai dengan kebutuhan dan sesuai dengan tujuan pembelajaran yang hendak dicapai. Sebagai salah satu referensi dalam mengembangkan LKS, dapat pula merujuk pada pendapat ahli mengenai kriteria LKS yang baik. Berikut diberikan beberapa karakteristik LKS yang baik yang diadaptasi dari pendapat Arends & Kilcher (2010).

1) Bahasa yang digunakan memperhatikan kaidah berbahasa yang baik,
2) Tugas-tugas pada LKS sesuai dengan usia perkembangan siswa,
3) LKS berguna sebagai alat membimbing siswa secara berkelanjutan,
4) Waktu dalam mengerjakan LKS tidak terlalu lama,
5) LKS dapat menunjukkan kemajuan belajar siswa,
6) LKS harus memiliki prosedur kerja yang jelas,
7) LKS membantu kesuksesan belajar siswa,
8) LKS harus menarik dan menyenangkan.

## Dampak Penerapan Model Pembelajaran

Dampak pembelajaran merupakan efek atau dampak yang ditimbulkan oleh implementasi suatu model pembelajaran (Huda, 2014: 76). Dampak pembelajaran terdiri atas dua macam, yaitu dampak instruksional dan dampak pengiring. Dampak instruksional (dampak langsung) merupakan pengaruh langsung yang disebabkan oleh konten atau skill yang menjadi dasar pelaksanaan model tersebut. Sementara itu dampak pengiring (dampak tidak langsung) merupakan pengaruh yang sifatnya implisit dalam lingkungan atau bisa disebut sebagai pengaruh tidak langsung pelaksanaan model pembelajaran. Biasanya, dampak langsung suatu model pembelajaran adalah pemahaman atau penguasaan siswa terhadap kompetensi yang diharapkan. Sementara itu, dampak tidak langsung adalah *skill* atau keterampilan siswa yang muncul akibat adanya aktivitas belajar yang mereka lalui. Misalnya kegiatan belajar dengan berdiskusi akan melahirkan keterampilan siswa dalam berkomunikasi, atau kegiatan belajar yang mengedepankan aktivitas pemecahan masalah akan melahirkan siswa yang terampil menyelesaikan masalah, dan keterampilan lainnya yang mungkin timbul sebagai dampak tidak langsung dari pelaksanaan pembelajaran.

# Bab 2

# Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi

## Pengertian Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi

Sejumlah referensi telah menyinggung mengenai kemampuan berpikir seseorang. Webb & Coxford (Sumarmo & Nishitani, 2010) mengemukakan bahwa tingkatan berpikir dalam matematika diklasifikasikan dalam dua level berdasarkan kedalaman dan kompleksitas aktivitasnya, yaitu *lower order thinking* (LOT) dan *higher order thinking* (HOT). Kemampuan *lower order thinking* (LOT) mencakup kemampuan melakukan operasi aritmetika sederhana, menerapkan aturan secara langsung, bekerja pada tugas-tugas algoritma. Sedangkan kemampuan *higher order thinking* (HOT) mencakup wawasan matematik, membuat dugaan, membuat analogi dan generalisasi, penalaran logis, pemecahan masalah, komunikasi dan koneksi matematika.

Sementara itu, Thompson (2008) mengklasifikasikan kemampuan berpikir berdasarkan aktivitas menyelesaikan tugas-tugas matematika. Thompson (2008) menjelaskan bahwa *lower order thinking* dalam matematika adalah kemampuan menyelesaikan tugas-tugas yang menggunakan informasi yang mudah diingat atau menerapkan algoritma sederhana dalam situasi atau konteks yang sudah dikenali siswa. Sedangkan, *higher order thinking* (*HOT) "involves solving tasks where an algorithm has not been taught or using known algorithms while working in unfamiliar contexts or situations*" Thompson (2008). Pendapat tersebut menekankan bahwa *higher order thinking* dalam matematika berhubungan dengan kemampuan menyelesaikan tugas-tugas baru yang berbeda dengan situasi yang pernah diselesaikan sebelumnya.

Pendapat Thompson tersebut sesuai dengan pendapat Mainali (2012), bahwa "*HOT means handling a situation that we have not encountered before*". Dalam hal ini, berpikir tingkat tinggi berarti menangani situasi yang belum pernah ditemui sebelumnya". Proses berpikir tingkat tinggi ini akan terjadi bila individu menghadapi masalah baru, dan tidak terdefinisi dengan jelas. Selain itu, Brookhart (2010) mengemukakan bahwa "*higher-order thinking is conceived as students being able to relate their learning to other elements beyond those they were taught to associate with it*". Maksudnya adalah berpikir tingkat tinggi berhubungan dengan kemampuan siswa untuk mengaplikasikan dan menghubungkan pembelajaran dengan hal-hal baru yang belum pernah diajarkan. Moseley, Baumfield, Elliott, *et al*. (2005) mengemukakan bahwa "*higher-order thinking is essentially a learning process which leads to a deeper understanding of the nature, justification, implications, and value of what is known*". Pendapat tersebut menekankan bahwa *higher order thinking* mengarahkan pada pemahaman yang mendalam terhadap sesuatu yang sedang dipelajari. Pendapat lainnya mengaitkan kemampuan berpikir tingkat tinggi dengan proses pemecahan masalah dan penyelesaian tugas-tugas yang diberikan. Rubin & Rajakaruna (2015) mengemukakan bahwa "*the higher order thinking processes that occur in the process of solving mathematical problems are characterized by the application of multiple criteria, which may not be known in advance*". Pendapat ini mengaitkan kemampuan berpikir tingkat tinggi dengan penerapan beberapa kriteria, yang mungkin tidak diketahui di awal.

## Karakteristik Berpikir Tingkat Tinggi

Ramos, Dolipas, & Villamor (2013) mengemukakan bahwa "*higher-order thinking basically means thinking that is taking place in the higher-levels of the hierarchy of cognitive processing*". Pendapat di atas dapat dimaknai bahwa kemampuan berpikir tingkat tinggi (*higher order thinking*) menempati level teratas dalam taksonomi proses kognitif. Sehubungan dengan itu, beberapa pakar mengemukakan bahwa karakteristik *higher order thinking* dapat dilihat dari aktivitas kognitif siswa yang melibatkan 3 level terakhir dalam taksonomi Bloom. Ramirez & Ganaden (2008) berpendapat bahwa; "*the top three cognitive processes considered as higher order thinking skills".* Dalam taksonomi Bloom yang direvisi, tiga level terakhir tersebut adalah analisis, evaluasi dan mengkreasi (Anderson & Krathwohl, 2015).

Sejalan dengan uraian di atas, beberapa pendapat mengemukakan karakteristik berpikir tingkat tinggi berdasarkan taksonomi Bloom. Misalnya, Thompson (2008: 3) yang menjelaskan bahwa "*the thinking skills in Bloom Taxonomy considered LOT include knowledge and comprehension, while the thinking skills of analysis, synthesis and evaluation are considered HOT*". Arends & Kilcher (2010) mengemukakan bahwa berpikir tingkat tinggi (*higher-order thinking*) menyangkut kemampuan memahami (*understanding*), membandingkan (*comparing*), mengevaluasi (*evaluating*), menjelaskan (*explaining*), dan mencipta (*creating*). Moore & Stanley (2010: 10) menyebutkan secara eksplisit bahwa "*in Bloom's Taxonomy, the three levels that require higher-level thinking are analysis, synthesis, and evaluation*".

Sejalan dengan pendapat diatas, Hopson, Simms, & Knezek (2001: 110) juga mengemukakan bahwa "*higher-order thinking skills as those cognitive skills that allow students to function at the analysis, synthesis, and evaluation levels of Bloom's Taxonomy*". Selain itu, Lipman (Moseley et al., 2005) berpendapat bahwa *higher order thinking* berkaitan dengan analisis, sintesis dan evaluasi.

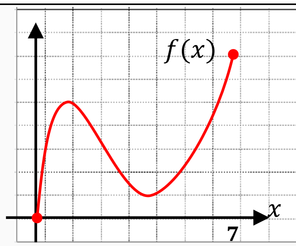
Berdasarkan uraian diatas, dapat disimpulkan bahwa berpikir tingkat tinggi adalah aktivitas kognitif mendalam yang digunakan seseorang dalam menangani situasi, memecahkan masalah, atau mengerjakan tugas-tugas baru atau non rutin atau melibatkan proses kognitif yang berada pada level terakhir dalam taksonomi proses kognitif yaitu analisis, evaluasi, atau sintesis (mengkreasi).

## Aspek-aspek Berpikir Tingkat Tinggi

Berdasarkan definisi kemampuan berpikir tingkat tinggi yang telah dikemukakan di atas, kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa dapat diukur berdasarkan tiga aspek pada Taksonomi Bloom. Berdasarkan hasil revisi taksonomi Bloom yang dikemukakan oleh Anderson & Krathwohl (2015) tentang hierarki proses kognitif dalam taksonomi Bloom, maka diperoleh tiga komponen teratas dalam taksonomi proses kognitif memiliki urutan hierarki yaitu, analisis (level 4), evaluasi (level 5), sintesis/mengkreasi (level 6). Oleh karena itu, aspek kemampuan berpikir tingkat tinggi yang digunakan yaitu analisis, evaluasi, dan sintesis (mengkreasi).

Anderson & Krathwohl (2015) menjelaskan bahwa analisis melibatkan kemampuan untuk memilah material atau komponen yang diberikan menjadi beberapa bagian kecil, dan menentukan bagaimana hubungan antar bagian dan antara setiap bagian dan struktur keseluruhannya. Oleh karena itu, aspek analisis dapat diukur dengan kemampuan membedakan informasi yang relevan dan tidak relevan dengan permasalahan, dan kemampuan menyebutkan prosedur yang tepat dalam menyelesaikan masalah. Berikut diberikan salah satu contoh soal yang dapat digunakan untuk mengukur aspek analisis. Soal berikut membutuhkan kemampuan siswa dalam memilah informasi yang relevan dengan grafik fungsi yang diberikan.

Gambar 1. Contoh Soal untuk Mengukur Kemampuan Analisis




Aldi dan Rahma melakukan identifikasi terhadap nilai ekstrim dan jenis ekstrim dari grafik fungsi seperti pada gambar. Hasil identifikasi mereka adalah sebagai berikut:

**Aldi**

A1. $f(x)$ memiliki dua titik stasioner yaitu saat $x = 1$ dan $x = 4$.
A2. $f(x)$ memiliki nilai maksimum saat $x = 1$ dan minimum saat $x = 4$.
A3. $f(x)$ memiliki satu titik belok yang terletak pada interval [1,4].

**Rahma**

R1. $f(x)$ memiliki empat titik stasioner yaitu saat $x = 0,\ x = 1$, $x = 4$ dan $x = 7$,
R2. $f(x)$ memiliki nilai maksimum pada saat $x = 7$ dan nilai minimum pada saat $x = 0$
R3. $f(x)$ memiliki dua titik belok yaitu pada saat $x = 1$ dan $x = 4$.

Tunjukkanlah hasil identifikasi Aldi dan Rahma yang sesuai dengan grafik fungsi $f(x)$ adalah....

Sementara itu, evaluasi didefinisikan sebagai membuat keputusan berdasarkan kriteria. Kriteria yang digunakan biasanya berkaitan dengan kualitas, efektivitas, efisiensi dan konsistensi (Anderson & Krathwohl, 2015). Oleh karena itu, aspek evaluasi dapat diukur dengan kemampuan menilai kebenaran suatu pernyataan, dugaan, atau proses matematisasi dan kemampuan menafsirkan solusi dari suatu masalah. Untuk mengukur aspek evaluasi, dapat digunakan contoh soal berikut. Soal yang diberikan membutuhkan kemampuan siswa dalam memberikan penilaian, mengecek, langkah matematis yang dilakukan oleh dua orang yang berbeda.

Gambar 2. Contoh Soal untuk Mengukur Kemampuan Evaluasi

Andi dan Yuni sedang mendiskusikan tugas matematika yang diberikan kepada mereka. Mereka menggunakan langkah yang berbeda untuk menyelesaikan tugas tersebut. Berikut adalah pekerjaan Andi dan Yuni.
Soal Tugas: Tentukan $g'(x)$ jika diketahui $g(x) = (2x+1)^2(x-1)$.

| **Andi** | **Yuni** |
|---|---|
| Diketahui: $g(x) = (2x+1)^2(x-1)$.<br>Ditanyakan: $g'(x)$<br>Penyelesaian:<br>$g(x) = (2x+1)^2(x-1)$<br>$g(x) = (4x^2+4x+1)(x-1)$<br>$g(x) = 4x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 4x + x - 1$<br>$g(x) = 4x^3 - 3x - 1$<br>Sehingga $\boldsymbol{g'(x) = 12x^2 - 3}$ | Diketahui: $g(x) = (2x+1)^2(x-1)$.<br>Ditanyakan: $g'(x)$<br>Penyelesaian:<br>Dengan menggunakan aturan perkalian dan aturan rantai pada turunan fungsi, diperoleh:<br>$g'(x) = 2.2(2x+1)(x-1) + (2x+1)^2$ → langkah 1<br>$g'(x) = 4(2x^2 - 2x + x - 1) + (2x+1)^2$ → langkah 2<br>$g'(x) = 4(2x^2 + x - 1) + (2x+1)^2$ → langkah 3<br>$g'(x) = (8x^2 + 4x - 4) + (4x^2 + 4x + 1)$ → langkah 4<br>$\boldsymbol{g'(x) = 12x^2 + 8x - 3}$ → langkah 5 |

Andi dan Yuni memperoleh hasil yang berbeda. Setelah diperiksa, Pak guru mengatakan bahwa penyelesaian Yuni masih keliru. Dimanakah letak kesalahannya?

Aspek yang terakhir, yaitu sintesis (mengkreasi) melibatkan proses menyusun elemen-elemen menjadi sebuah kesatuan yang koheren atau fungsional (Anderson & Krathwohl, 2015). Oleh karena itu, aspek sintesis dapat diukur dengan kemampuan menyebutkan dugaan atau pola, menarik kesimpulan yang benar berdasarkan data yang diberikan, dan memodifikasi data yang diberikan agar sesuai dengan kriteria. Untuk mengukur aspek sintesis, dapat digunakan contoh soal berikut.

Gambar 3. Contoh Soal untuk Mengukur Kemampuan Sintesis

"Jika $p(x) = tan\, x$, $q(x) = cos\, x$, dan $r(x)$ adalah fungsi yang diperoleh dengan mengoperasikan fungsi $p(x)$ dan $q(x)$, dengan $r'(0) = 0$. Operasi fungsi $p(x)$ dan $q(x)$ yang tepat supaya sesuai dengan kriteria tersebut adalah…."

Soal tersebut dapat diselesaikan dengan melakukan modifikasi terhadap fungsi. Modifikasi tersebut dilakukan dengan memanipulasi fungsi-fungsi yang ada sehingga kriteria yang ditetapkan dapat terpenuhi.

## Melatih Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Siswa

Terdapat beberapa sudut pandang yang digunakan oleh para ahli untuk menjelaskan cara untuk melatih kemampuan berpikir tingkat tinggi. Protheroe (2007), menyarankan enam hal yang harus dilakukan dalam kelas matematika untuk mendayagunakan kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa, antara lain: (1) *actively engage in doing mathematics;* (2) *solve challenging problems;* (3) *make interdisciplinary connections;* (4) *share mathematical ideas;* (5) *use multiple representations to communicate mathematical ideas;* dan (6) *use manipulates and other tools*.

Ada 6 poin utama dari pendapat tersebut berkaitan dengan aktivitas yang harus dilakukan. Pertama adalah keaktifan siswa dalam melakukan aktivitas matematika. Hal ini sangat erat kaitannya dengan teori konstruktivisme yang menyatakan bahwa pengetahuan harus dibangun sendiri oleh siswa, bukan diberikan secara langsung oleh guru. Kedua, menyelesaikan masalah matematika yang menantang. Brookhart (2010) mengemukakan bahwa berpikir tingkat tinggi dapat dipandang sebagai pemecahan masalah. Dalam aktivitas memecahkan masalah siswa dapat menggunakan berbagai strategi, misalnya menggunakan langkah penyelesaian masalah yang dikemukakan Polya: memahami masalah, merencanakan strategi, menjalankan strategi, dan melihat kembali. Aktivitas tersebut membutuhkan kemampuan siswa dalam menganalisis informasi pada masalah, merencanakan dan mensintesis strategi pemecahan dan mengevaluasi hasil yang diperoleh. Hal ini berarti bahwa selama aktivitas memecahkan masalah siswa menggunakan aktivitas menganalisis, mengevaluasi, dan mensintesis atau mengkreasi yang merupakan karakteristik dari berpikir tingkat tinggi. Ketiga, membuat koneksi dengan berbagai disiplin ilmu. Ketika siswa mampu mengkoneksikan matematika dengan disiplin ilmu lainnya, berarti siswa telah mengadaptasi konsep-konsep dalam matematika ke dalam situasi yang baru. Misalnya dengan menghubungkan matematika dengan bidang fisika, ekonomi, maupun bidang lainnya yang relevan dengan matematika. Aktivitas ini sesuai dengan definisi kemampuan berpikir tinggi yang telah dijabarkan di atas. Keempat, berbagi ide-ide matematika. Aktivitas ini akan terjadi jika siswa dikondisikan dalam suatu forum diskusi untuk mengkomunikasikan ide-ide mereka. Pada saat siswa menyampaikan ide, teman kelompoknya akan melakukan analisis terhadap ide tersebut, sekaligus melakukan evaluasi dengan mencocokkan apa yang disampaikan dengan apa yang telah diketahui sebelumnya. Kelima, menggunakan berbagai cara untuk mengungkapkan ide-ide matematika. Ide-ide matematika dapat disampaikan dengan berbagai cara, misalnya dengan gambar, grafik, diagram, simbol, maupun dengan kata-kata. Untuk mampu merepresentasikan ide dalam berbagai bentuk, maka dibutuhkan pemahaman mendalam dan keterampilan dalam mengkoneksikan konsep yang satu dengan lainnya. terakhir, atau keenam adalah menggunakan alat-alat manipulatif. Alat-alat manipulatif ini dibutuhkan untuk memperjelas kondisi dalam suatu permasalahan. Selain itu, secara implisit mengemukakan bahwa untuk melatih kemampuan berpikir tingkat tinggi dibutuhkan masalah. Masalah yang digunakan adalah masalah yang menantang (memberikan motivasi bagi siswa untuk turut serta dalam pembelajaran), membutuhkan kerjasama beberapa orang untuk menyelesaikannya, memiliki koneksi dengan disiplin ilmu lain.

Pemaparan di atas, sejalan dengan pendapat yang dikemukakan oleh Miri, David, & Uri (2007) bahwa secara garis besar terdapat tiga strategi yang dapat dilakukan untuk melatih kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa, yaitu: (1) *present real-world cases;* (2) *direct class discussions related to a concept/phenomenon or a problem;* dan (3) *guide short inquiry-type experiments in groups*. Sementara itu, Goethals (2013) menambahkan bahwa untuk melatih kemampuan berpikir siswa, guru harus menggunakan teknik bertanya yang baik. Penggunaan pertanyaan tingkat tinggi dapat membantu siswa untuk mengembangkan kemampuan berpikirnya (Lee, 2015). Namun tidak semua pertanyaan harus diajukan dengan menggunakan jenis pertanyaan tingkat tinggi. Selain itu, Goethals (2013); Collins (2014) juga mengemukakan bahwa untuk mendukung pendayagunaan kemampuan berpikir tingkat tinggi dapat dilakukan dengan mengorganisasikan siswa dalam kelompok.

# Bab 3

# Model Pembelajaran Kalkulus Berbasis Masalah (MPK-BM)

Penerapan model pembelajaran yang tepat merupakan faktor penunjang tercapainya tujuan pembelajaran. Tercapainya tujuan pembelajaran berimplikasi pada tercapainya tujuan pendidikan. Namun, dalam praktiknya, setiap model pembelajaran tidak dapat digunakan untuk semua mata pelajaran. Bahkan suatu model pembelajaran belum tentu cocok digunakan untuk membelajarkan siswa pada sejumlah materi pelajaran yang berbeda. Mengacu pada argumentasi tersebut, maka seorang guru seharusnya memiliki kemampuan dalam mengaplikasikan atau bahkan mengembangkan beberapa model pembelajaran inovatif. Salah satu model pembelajaran inovatif yang dinilai harus dikuasai oleh guru adalah model pembelajaran berbasis masalah atau PBM. Hal tersebut juga menjadi alasan PBM menjadi salah satu model pembelajaran yang direkomendasikan dalam implementasi K-13 (Retnawati, 2015).

## Model Pembelajaran Berbasis Masalah

PBM merupakan salah satu model pembelajaran yang berpusat pada siswa (*student centered*) yang menggunakan masalah-masalah kontekstual (*real world problems*), kompleks dan tidak terstruktur sebagai titik awal pembelajaran (Ajai & Imoko, 2014). PBM memiliki banyak keunggulan terutama mengaktifkan keikutsertaan siswa dalam pengalaman belajar (Arends & Kilcher, 2010; Burton, 2010), membentuk siswa menjadi pemikir yang fleksibel dan sukses sebagai pemecah masalah (Ertmer, Simons, & Simons, 2006). Selain itu, hasil-hasil riset menunjukkan bahwa PBM mendukung peningkatan kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa (Magsino, 2014; Sastrawati, Rusdi, & Syamsurizal, 2011; Sumarmo & Nishitani, 2010).

Namun demikian, sebagian besar guru masih kesulitan dalam menerapkan model pembelajaran berbasis masalah (Retnawati, 2015). Kesulitan tersebut disebabkan Materi pelajaran matematika yang sulit seperti kalkulus cenderung masih diajarkan dengan metode ceramah. Padahal, hasil penelitian telah mengungkapkan bahwa pembelajaran berbasis masalah dalam materi kalkulus dapat mengembangkan kemampuan berpikir kritis (*critical thinking*), kemampuan mengevaluasi dan membuat keputusan (Mokhtar, Tarmizi, Tarmizi, & Ayub, 2010). Hasil tersebut mengindikasikan bahwa model pembelajaran berbasis masalah dapat diimplementasikan pada materi pelajaran yang sukar seperti kalkulus. Oleh karena itu, perlu dilakukan pengembangan model pembelajaran kalkulus berbasis masalah, dengan tujuan untuk menghasilkan model pembelajaran berbasis masalah yang dilengkapi dengan petunjuk operasional pelaksanaannya sehingga memudahkan guru dalam mengimplementasikannya

## Model Pembelajaran Kalkulus Berbasis Masalah

Model pembelajaran kalkulus berbasis masalah (MPK-BM) adalah model pembelajaran yang diadaptasi dan dikembangkan dari model pembelajaran berbasis masalah. Model pembelajaran kalkulus berbasis masalah (MPK-BM) dikembangkan dengan berlandaskan paradigma konstruktivisme. Model pembelajaran ini dikembangkan khusus untuk membelajarkan siswa pada materi kalkulus SMA. Materi kalkulus pada jenjang SMA meliputi limit fungsi, turunan fungsi dan integral. Seluruh aktivitas dalam MPK-BM dirancang untuk menumbuh kembangkan kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa atau *higher order thinking skill* (HOTS). Komponen MPK-BM yang terdapat pada buku ini antara lain: (1) sintaks atau langkah-langkah pembelajaran; (2) sistem sosial; (3) prinsip reaksi; (3) sistem pendukung; dan (4) dampak pembelajaran.

Sintaks MPK-BM merupakan hasil modifikasi dari sintaks model pembelajaran berbasis masalah yang dikemukakan oleh beberapa ahli, antara lain Eggen dan Kauchak (2012), dan Arends (2012), Tan (2003). Secara garis besar sintaks pembelajaran dalam MPK-BM dikembangkan berdasarkan kegiatan-kegiatan pembelajaran yang terdapat dalam pembelajaran berbasis masalah. Arah pengembangan sintaks pembelajaran berbasis masalah dikelompokkan menjadi dua aspek, yaitu dari segi pengelolaan masalah dan pengelolaan kelas.

Aspek-aspek kegiatan dalam pembelajaran berbasis masalah diperoleh dari kegiatan pembelajaran yang dikemukakan oleh para ahli. Kegiatan "*meeting the problem, problem analysis and learning issues, discovery and reporting* dan *overview integration and evaluation"* yang dikemukakan oleh

Tan (2003) merupakan bagian dari pengelolaan masalah. Sedangkan *solution presentation and reflection* merupakan bagian dari pengelolaan kelas yang meliputi kegiatan presentasi dan refleksi. Kegiatan pembelajaran berbasis masalah yang dikemukakan Eggen & Kauchak (2012), yang diawali dengan mereview dan menyajikan masalah hingga menerapkan strategi juga termasuk dalam kegiatan pengelolaan masalah. Sementara itu, kegiatan membahas dan mengevaluasi hasil juga termasuk pengelolaan kelas, karena pada tahap ini siswa dipersilahkan untuk menyampaikan gagasannya di depan kelas. Dua pendapat di atas sejalan dengan kegiatan pembelajaran berbasis masalah yang dikemukakan oleh Arends (2012), yang juga dapat dikelompokkan menjadi dua aspek (pengelolaan masalah dan pengelolaan kelas). Akan tetapi, kegiatan pembelajaran yang dikemukakan oleh Arends (2012) lebih eksplisit menyatakan tahapan mengorganisasikan siswa dalam belajar pada fase kedua. Pada tahap ini siswa diarahkan untuk menyelesaikan masalah yang diberikan melalui diskusi kelompok. Sementara itu, kegiatan *develop and present artifact and exhibits* juga termasuk dalam aktivitas pengelolaan kelas, dimana guru memberikan kesempatan bagi siswa mempresentasikan dan memamerkan hasil karya di depan kelas.

Aspek pengelolaan masalah dikelompokkan menjadi lima kegiatan, dengan satu kegiatan dilakukan oleh guru sebelum kegiatan pembelajaran dan empat kegiatan yang dilakukan selama proses pembelajaran berlangsung. Sementara itu, kegiatan pengelolaan kelas terdiri dari dua kegiatan yang juga dilakukan dalam kegiatan pembelajaran. Secara rinci penjabaran aspek kegiatan PBM menjadi kegiatan pembelajaran dalam MPK-BM dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Kegiatan Belajar dalam MPK-BM

| **Aspek Kegiatan** | **Kegiatan dalam MPK-BM** |
|---|---|
| Pengelolaan Masalah | 1. Merancang masalah<br>2. Menyajikan masalah<br>3. Mengidentifikasi dan merumuskan masalah<br>4. Menyelidiki dan menyelesaikan masalah<br>5. Mengevaluasi dan menarik kesimpulan |
| Pengelolaan Kelas | 1. Mengorganisasikan siswa<br>2. Menyajikan penyelesaian masalah |

Pengelolaan masalah dimulai dengan merancang masalah yang dilakukan sebelum proses pembelajaran. Kegiatan merancang masalah ini sangat penting mengingat bahwa model pembelajaran kalkulus berbasis masalah dikendalikan oleh masalah. Artinya, salah satu faktor yang menentukan suksesnya MPK-BM adalah jenis masalah yang dirancang oleh guru. Desain/rancangan masalah berkaitan dengan karakteristik, konteks, lingkungan dan sumber-sumber belajar, serta tampilan.

1. Karakteristik masalah.
   a) Relevansi masalah dengan materi kalkulus,
   b) Relevansi masalah dengan kehidupan nyata,
   c) Tingkat kesulitan masalah (diberikan dengan beberapa level kesulitan),
   d) Tingkat kompleksitas masalah,
   e) Hubungan masalah dengan disiplin ilmu lainnya
   f) Kemungkinan jumlah solusi yang bisa diperoleh
   g) Keterkaitan dengan konsep-konsep yang telah dipelajari.
2. Konteks masalah:
   a) Masalah tidak terdefinisi dengan jelas (*ill-structured*)
   b) Menimbulkan motivasi dan keingintahuan siswa untuk mencari solusinya
   c) Menantang
   d) *novelty*
3. Lingkungan dan sumber belajar:
   a) Menstimulasi aktivitas kolaborasi, penemuan dan diskusi kelompok.
   b) Membutuhkan beberapa sumber belajar untuk menyelesaikannya
4. Tampilan masalah:
   Disajikan dengan cara yang beragam (kertas, slide power point, video, suara, dll)

Selain karakteristik yang telah disebutkan di atas, masalah yang digunakan dalam MPK-BM berupa soal-soal cerita yang terdiri dari *routine story problem* dan *nonroutine process problem*. Kedua jenis masalah tersebut dirancang untuk kebutuhan yang berbeda. *Routine story problem* adalah soal-soal yang biasanya diberikan pada akhir pembelajaran (Souvieny, 1994). *Routine story problem* dirancang sebagai bahan latihan setelah siswa mempelajari berbagai konsep. Soal cerita yang diberikan juga berbasis kehidupan sehari-hari yang bertujuan untuk melatih kemampuan siswa dalam membaca/menginterpretasi dan membantu perkembangan ide-ide dan prosedur matematis yang baru. Biasanya *routine story problem*, dapat diselesaikan dengan memilih dan menerapkan satu atau lebih operasi.

***Contoh routine story problem***

| |
|---|
| Sebuah perusahaan pengalengan ikan mampu memproduksi sebanyak 3000 kaleng ikan per hari dengan berat setiap kaleng adalah 250gr. Jika Perusahaan tersebut beroperasi selama 6 hari dalam satu pekan, berapa banyak ikan kaleng yang dihasilkan jika perusahaan tersebut telah beroperasi selama hampir satu bulan? |

Sementara itu, *nonroutine process problem* tidak dapat diselesaikan secara langsung dengan menerapkan satu atau lebih operasi, ataupun menggunakan satu atau beberapa konsep. Dibutuhkan kemampuan yang lebih kompleks, dan fleksibel untuk menyelesaikan masalah tersebut. Hal ini disebabkan *nonroutine process problem* membutuhkan penerapan beberapa kriteria, penerapan beberapa konsep, atau penerapan konsep-konsep yang pernah dipelajari sebelumnya. Berdasarkan uraian di atas, dapat dilihat bahwa terdapat perbedaan mendasar antara *routine story problem* dan *nonroutine process problem. Routine story problem* dapat berupa masalah yang dapat diselesaikan dengan satu langkah, atau banyak langkah, sedangkan *nonroutine process problem* membutuhkan satu atau banyak konsep untuk menyelesaikannya.

***Contoh nonroutine process problem***

| |
|---|
| Sebuah lahan pertanian mampu menghasilkan 30 Ton padi pada tahun pertama pengolahan lahan tersebut. Pada tahun ke dua, terjadi penurunan jumlah panen menjadi 22,5 Ton disebabkan adanya limbah pabrik yang mencemari kawasan persawahan. Seorang konsultan pertanian menemukan bahwa kesuburan tanah telah mengalami penurunan sehingga hasil panen pada lahan tersebut dari tahun pertama ke tahun-tahun berikutnya memenuhi fungsi $H(t) = 15 + \frac{15}{t}$, dengan H adalah hasil panen dalam ton, dan t adalah waktu dalam tahun. Petani yang mengolah lahan tersebut akan memperoleh laba jika hasil panen paling sedikit sebanyak 15 ton per tahun. Jika petani terus mengolah lahan tersebut, mungkinkah petani akan mengalami kerugian? Kemukakan alasanmu! |

Jika diperhatikan, contoh *routine story problem* dapat diselesaikan langsung dengan menggunakan konsep limit fungsi, sementara itu, contoh *nonroutine process problem* di atas menggunakan konsep limit, dan konsep laba dan rugi, untuk menyelesaikannya. Dengan demikian, guru dapat memilih *nonroutine process problem* untuk melatih kemampuan berpikir tingkat tingginya. Namun, untuk membantu siswa dalam menyelesaikan permasalahan tersebut, guru perlu memberikan atau mengarahkan siswa untuk mencari dan menggunakan berbagai sumber belajar selama proses pembelajaran. Selengkapnya mengenai contoh permasalahan yang digunakan dalam MPK-BM dapat dilihat pada subbab sistem pendukung MPK-BM.

Selanjutnya, pengelolaan masalah dalam proses pembelajaran ditandai dengan pemberian masalah kepada siswa, mengidentifikasi dan merumuskan masalah, menyelidiki dan menyelesaikan masalah serta penilaian (evaluasi) dan penarikan kesimpulan dari masalah. Sementara itu, aspek pengelolaan kelas terlihat pada tahap mengorganisasikan siswa dalam kelompok belajar serta adanya kegiatan presentasi atau penyajian hasil karya kelompok di depan kelas.

## Sintaks (langkah-langkah) MPK-BM

Sebagaimana yang telah disebutkan sebelumnya, sintaks model pembelajaran kalkulus berbasis masalah (MPK-BM) diadaptasi dan dikembangkan dari sintaks pembelajaran berbasis masalah yang dikemukakan oleh beberapa pakar. Adapun sintaks pembelajaran dalam MPK-BM yaitu: (1) menyajikan masalah, (2) mengorganisasi siswa untuk belajar, (3) mengidentifikasi dan merumuskan masalah, (4) menyelidiki dan menyelesaikan masalah, (5) menyajikan penyelesaian masalah, dan (6) mengevaluasi dan menarik kesimpulan. Secara garis besar setiap langkah dalam sintaks pembelajaran MPK-BM dirancang untuk memberikan kesempatan bagi siswa untuk mengkonstruksi pengetahuannya sekaligus menstimulasi kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa.

### *Menyajikan Masalah*

Tahap ini merupakan kegiatan awal pembelajaran. Kegiatan ini dimulai dengan penyampaian tujuan pembelajaran dan apersepsi oleh guru. Selanjutnya, guru menumbuhkan persepsi positif dan motivasi belajar siswa dengan cara menjelaskan manfaat dari materi yang akan dipelajari bagi kehidupan sehari-hari siswa. Selain menyampaikan motivasi belajar, guru mendorong siswa untuk terlibat aktif dalam kegiatan pembelajaran.

Kegiatan selanjutnya yang dilakukan oleh guru dalam tahap ini adalah menyajikan masalah yang bersumber dari kehidupan sehari-hari maupun berkaitan dengan disiplin ilmu lainnya (misalnya: masalah gerak, masalah pertumbuhan penduduk, masalah keuntungan perusahaan, dan masalah-masalah lainnya) termasuk masalah-masalah dalam kalkulus itu sendiri yang relevan dengan indikator kompetensi yang ingin dicapai. Selain itu, jenis-jenis masalah yang digunakan harus memperhatikan karakteristik masalah yang digunakan dalam MPK-BM.

Masalah berupa gambar maupun narasi dapat disajikan melalui media LKS, atau dengan menampilkan di depan kelas dengan menggunakan proyektor. Selain itu, masalah juga dapat diberikan dengan menampilkan video yang relevan dengan masalah yang akan dipelajari siswa. Namun, apabila sarana proyektor tidak tersedia di kelas, guru dapat pula meminta siswa untuk mengakses video yang telah diunggah (*upload)* pada suatu *website* sebelum pembelajaran dimulai. Untuk keperluan tersebut, guru perlu menginformasikan atau meminta siswa untuk mengakses video tersebut pada pertemuan sebelumnya. Bila diperlukan guru memberikan ilustrasi singkat tentang masalah-masalah kalkulus yang akan diselesaikan oleh siswa, sebelum siswa menyelesaikan permasalahan tersebut secara mandiri maupun berkelompok.

### *Mengorganisasikan Siswa untuk Belajar*

Pada tahap ini guru membentuk kelompok-kelompok belajar yang beranggotakan 4-5 orang siswa. Kelompok belajar yang dibentuk bersifat heterogen, yaitu dengan memperhatikan karakteristik siswa, misalnya kemampuan, jenis kelamin, agama dan budaya dengan tujuan agar siswa memiliki keterampilan bekerjasama, berkomunikasi, serta menumbuhkan sikap toleransi dan menghargai perbedaan diantara anggota kelompok. Disamping itu, guru perlu memperhatikan dinamika sosial yang terdapat dalam kelas. Hal ini perlu dilakukan mengingat beberapa siswa terkadang sulit untuk bekerjasama selain teman dekatnya. Oleh karena itu, perlu diberikan motivasi kepada siswa tentang pentingnya keterbukaan dan penerimaan terhadap individu lainnya. Hal ini perlu dilakukan secara kontinu agar siswa secara sadar dapat bekerjasama dengan baik bersama teman kelompoknya meskipun secara emosional siswa tersebut tidak terlalu dekat dengan teman kelompoknya tersebut.

Setelah membentuk kelompok, guru menjelaskan cara bekerjasama (kolaborasi) dengan teman dan cara berinteraksi dengan guru dalam aktivitas memecahkan masalah dengan menggunakan pola interaksi sosial budaya tertentu. Kegiatan ini bertujuan agar siswa memahami peran dan juga pola interaksi yang mereka gunakan selama proses pembelajaran. Selain itu, nilai-nilai budaya yang ditanamkan bertujuan untuk melatih siswa dalam berkomunikasi, bertindak dan berperilaku yang sesuai dengan nilai-nilai budaya sehingga karakter positif akan terbangun melalui proses pembelajaran.

Setelah itu, guru membagikan LKS yang akan digunakan untuk memfasilitasi kegiatan belajar kelompok dalam menyelesaikan masalah. LKS tersebut bertujuan untuk menuntun siswa dalam menemukan konsep-konsep yang dibutuhkan dalam menyelesaikan masalah yang diberikan pada setiap proses pembelajaran.

### *Mengidentifikasi dan Merumuskan Masalah*

Pada tahap ini, guru mengarahkan siswa untuk mengidentifikasi informasi-informasi penting yang terdapat dalam masalah. kegiatan ini dilakukan secara individu bertujuan agar semua siswa memahami masalah apa yang akan diselesaikan selama proses pembelajaran berlangsung. Selanjutnya, siswa melakukan diskusi kelompok untuk menentukan rumusan masalah dan menentukan informasi-informasi tambahan yang harus diketahui. Disamping itu, guru memberikan *scaffolding* (bantuan) berupa pertanyaan-pertanyaan, petunjuk, maupun bantuan yang bertujuan untuk memfasilitasi proses identifikasi dan perumusan masalah. Hasil identifikasi dan perumusan masalah harus dituliskan ke dalam LKS yang telah disediakan. Tahapan ini bertujuan untuk melatih kemampuan analisis siswa dalam mengidentifikasi informasi yang relevan dengan masalah yang diberikan.

### *Menyelidiki dan Menyelesaikan Masalah*

Pada tahap ini, siswa diarahkan untuk menyelesaikan masalah yang diberikan di awal pembelajaran. Siswa memulai kegiatan penyelidikan dengan melakukan pemilihan strategi yang akan digunakan dalam penyelesaian masalah. Apabila kompetensi yang akan dicapai merupakan suatu hal baru, maka siswa diarahkan terlebih dahulu untuk menemukan konsep-konsep yang relevan dengan masalah tersebut. Untuk memfasilitasi kegiatan tersebut, siswa diminta untuk melakukan beberapa kegiatan pada LKS yang bertujuan membantu siswa menemukan konsep-konsep yang relevan dengan masalah. Tahapan ini bertujuan untuk melatih kemampuan analisis dalam merencanakan prosedur dan memilih strategi yang tepat untuk menyelesaikan masalah.

Mengingat waktu yang tersedia di dalam kelas yang sangat terbatas, maka kegiatan penemuan ini dapat dilakukan siswa di luar jam pelajaran. Dalam hal ini, pada pertemuan sebelumnya siswa diberikan LKS yang berisi langkah-langkah penemuan yang akan digunakan pada pertemuan selanjutnya. Akan tetapi, jika masalah yang diberikan merupakan aplikasi dari konsep-konsep yang telah siswa miliki sebelumnya, maka kegiatan ini dapat langsung dilakukan di dalam kelas. Kegiatan ini dilakukan dalam diskusi sub kelompok yang terdiri dari dua sampai tiga orang siswa.

Setelah siswa menyelesaikan beberapa kegiatan tersebut, guru meminta siswa untuk berkolaborasi menentukan strategi yang tepat untuk menyelesaikan masalah yang diberikan. Strategi penyelesaian yang telah ditentukan selanjutnya digunakan untuk menentukan solusi dari masalah yang disajikan. Tahap ini bertujuan untuk melatih kemampuan siswa dalam mengkreasi ide-ide, membuat dugaan, membuat pola, atau melakukan modifikasi terhadap konsep-konsep yang telah dimiliki agar sesuai dengan konteks yang sedang dihadapi. Disamping itu, siswa juga dilatih untuk mengevaluasi proses dan hasil yang diperoleh sebelum menarik kesimpulan-kesimpulan yang logis berdasarkan informasi dan hasil yang diperoleh.

Seperti halnya pada tahap sebelumnya guru memberikan *scaffolding* (bantuan) berupa pertanyaan-pertanyaan, petunjuk, maupun bantuan yang bertujuan untuk membimbing siswa dalam proses pemecahan masalah. Pertanyaan yang dikemukakan oleh guru kepada siswa selama tahap penyelidikan ini direncanakan pada saat menentukan masalah yang akan digunakan. Pemberian pertanyaan tersebut bertujuan untuk memancing siswa berpikir lebih ekstensif dan mendalam. Aktivitas terakhir pada tahap ini adalah guru meminta siswa untuk menuliskan hasil penyelidikan kelompoknya untuk dipresentasikan di depan kelas.

### *Menyajikan Penyelesaian Masalah*

Pada tahap ini, guru meminta setiap kelompok untuk menyajikan hasil penyelesaian masalah yang telah mereka peroleh melalui kegiatan sebelumnya. Untuk memudahkan penyajiannya, penyelesaian masalah yang masing-masing kelompok dapat dituliskan pada sebuah karton yang kemudian ditempelkan di depan kelas. Selain itu, jika fasilitas ruang kelas dilengkapi dengan proyektor atau sejenisnya, dapat dimanfaatkan untuk menyajikan hasil yang diperoleh siswa. Media-media untuk menyajikan hasil tersebut masih sangat mungkin untuk dimodifikasi lagi sehingga sesuai dengan kebutuhan, serta dengan memperhatikan alokasi waktu ketersediaan sarana-prasarana.

Setelah itu, beberapa kelompok untuk melakukan presentasi hasil penyelidikan kelompoknya di depan kelas. Apabila memungkinkan, seluruh kelompok diberi kesempatan untuk mempresentasikan hasil yang diperoleh, namun apabila waktu yang tersedia terbatas, maka guru memilih beberapa kelompok saja untuk mempresentasikan hasilnya di depan kelas. Kelompok yang dipilih untuk mempresentasikan hasil penyelidikannya didasarkan keunikan hasil diskusi kelompok. Keunikan tersebut antara lain: jawaban yang berbeda dengan kelompok lain, terdapat konsep/ide penting pada hasil diskusi kelompok yang perlu untuk diberikan penekanan.

Setelah kelompok mempresentasikan hasil diskusinya, guru memberi kesempatan kepada kelompok lainnya untuk memberikan tanggapan berupa pertanyaan, masukan, atau kritik disertai alasan. Selain itu, sesekali guru juga memberikan pertanyaan-pertanyaan untuk menguji sejauh mana pemahaman siswa terhadap hasil kerja kelompoknya. Aktivitas yang dilakukan pada tahap ini bertujuan untuk melatih kemampuan komunikasi siswa dalam menyampaikan ide/ gagasannya di hadapan umum. Disamping itu, siswa juga dilatih untuk mengecek jawaban yang diperoleh oleh kelompok lainnya serta mencocokkan dengan hasil yang diperoleh kelompoknya.

### *Mengevaluasi dan Menarik Kesimpulan*

Pada tahapan ini, guru mengarahkan siswa untuk meninjau kembali langkah penyelesaian, hingga solusi dari masalah yang diperoleh. Setelah itu, guru mengajak siswa untuk membuat kesimpulan dan memberikan penguatan atas konsep yang termuat dalam aktivitas penyelidikan yang telah dilakukan siswa. Selanjutnya guru menguji pemahaman siswa dengan memberikan beberapa contoh maupun bukan contoh yang terkait konsep yang berkaitan dengan aktivitas penyelidikan. Aktivitas ini bertujuan untuk mengetahui efektifitas masalah (*effectiveness of the problem*) yang diberikan kepada siswa, kualitas hasil karya siswa (*quality of students' work*), dan untuk memonitor kesuksesan belajar siswa.

Tahapan akhir pada kegiatan pembelajaran ini melatih kemampuan siswa dalam mengevaluasi. Hal tersebut dilatih ketika siswa menilai kebenaran suatu pernyataan, dugaan maupun proses matematisasi yang dibuat oleh kelompoknya sendiri maupun oleh kelompok lain. Melalui aktivitas ini juga, siswa diajak untuk menafsirkan solusi yang diperoleh sesuai dengan konteks yang sedang dipelajari.

Aktivitas yang dirancang dalam MPK-BM bertujuan untuk menstimulasi kemampuan siswa dalam menganalisis, mensintesis (mengkreasi), dan mengevaluasi (Lihat Tabel 2. Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya bahwa ketiga kemampuan tersebut merupakan komponen atau aspek dalam HOTS. Dengan demikian aktivitas pembelajaran dalam MPK-BM diharapkan dapat menstimulasi kemampuan berpikir tingkat tinggi atau *higher order thinking skill* (HOTS) siswa.

Tabel 2. Aspek HOTS yang Dilatih Melalui MPK-BM

| Sintaks | Aktivitas siswa | Kemampuan yang dilatih |
|---|---|---|
| I | a. Mengamati, dan<br>b. Menanya | Analisis |
| II | a. Mengamati,<br>b. Menanya,<br>c. Memahami perlunya bekerjasama dalam kelompok,<br>d. Memahami nilai-nilai sosial budaya yang digunakan dalam berinteraksi dengan teman maupun guru. | Analisis |
| III | a. Mengidentifikasi informasi penting (Informasi yang telah diketahui, informasi tambahan yang perlu diketahui, dan apa yang ditanyakan) | Analisis |
| IV | a. Merencanakan prosedur penyelesaian masalah,<br>b. Memilih strategi yang tepat,<br>c. Mengkreasi ide-ide,<br>d. Membuat dugaan,<br>e. Membuat pola,<br>f. Melakukan modifikasi terhadap konsep-konsep yang telah dimiliki agar sesuai dengan konteks yang sedang dihadapi,<br>g. Mengevaluasi proses dan hasil yang diperoleh sebelum menarik kesimpulan-kesimpulan yang logis berdasarkan informasi dan hasil yang diperoleh. | Evaluasi dan Sintesis |
| V | a. Mengkomunikasikan ide-ide matematika dengan menggunakan beberapa cara, dan<br>b. Mengevaluasi ide, maupun gagasan dari kelompok lain. | Evaluasi |
| VI | a. Menilai kebenaran suatu pernyataan, dugaan maupun proses matematisasi yang dibuat oleh kelompoknya sendiri maupun oleh kelompok lain, dan<br>b. Menafsirkan solusi yang diperoleh sesuai dengan konteks yang sedang dipelajari<br>c. Menarik kesimpulan | Evaluasi |

## Sistem Sosial MPK-BM

Prinsip-prinsip sistem sosial yang terkandung dalam model pembelajaran kalkulus berbasis masalah (MPK-BM) antara lain: (1) murid aktif dalam pembelajaran dan guru aktif untuk menjadi fasilitator pembelajaran; (2) siswa menyelesaikan masalah secara individu maupun dalam kelompok; (3) guru mendorong terjadinya interaksi dan negosiasi yang kondusif dalam aktivitas kelompok siswa; (4) siswa bebas memilih strategi pemecahan masalah yang sesuai dengan struktur kognitif siswa sewaktu menyelesaikan masalah.

Upaya yang dilakukan untuk mendukung terlaksananya sistem sosial tersebut adalah dengan menerapkan pola pembelajaran kooperatif. Siswa dalam kelompok saling bekerjasama dalam menyelesaikan masalah, saling bertanya/ berdiskusi antara siswa yang lemah dan yang pintar, kebebasan mengajukan pendapat, berdialog dan berdebat. Peran guru adalah sebagai fasilitator yang berperan untuk memfasilitasi aktivitas siswa dalam melakukan pemecahan masalah. Guru tidak boleh terlalu mendominasi siswa, akan tetapi hanya memfasilitasi atau memberikan bantuan secukupnya (*scaffolding*) kepada siswa sampai akhirnya mereka mampu untuk melakukan pemecahan masalah sendiri.

Implementasi MPK-BM menggunakan nilai-nilai budaya lokal dalam sistem sosial pembelajaran. Tujuan penggunaan nilai-nilai budaya ke dalam sistem sosial pembelajaran untuk meningkatkan apresiasi siswa terhadap nilai budaya lokal sekaligus dapat meningkatkan hasil belajar siswa. Oleh karena itu, nilai-nilai budaya yang dimaksudkan di sini tidak mutlak terletak pada konten masalah yang digunakan. Nilai-nilai budaya sebagai alat kontrol atau sebagai norma yang mengatur pola interaksi siswa dan guru dalam pembelajaran. Nilai budaya tersebut juga menjadi pegangan bagi guru dalam merespon setiap tindakan, pertanyaan, atau tanggapan siswa.

Nilai budaya yang digunakan dalam MPK-BM adalah *Sara pata anguna* yang terdiri dari empat pilar utama: *pomae-maeka, pomaa-maasiaka, popia-piara, poangka-angkataka*. *Sara pata anguna* adalah sistem sosial yang berlaku pada masyarakat Buton, Provinsi Sulawesi Tenggara. *Sara Pata Anguna* dipilih karena dua alasan. Pertama, *Sara Pata Anguna* mengandung nilai moral/ akhlak yakni tanggung jawab, kepedulian terhadap lingkungan dan kepedulian sosial yang digunakan dalam kerangka menjaga hubungan manusia dengan sang Khalik kemudian menjaga hubungan manusia dengan manusia. Kedua, *Sara Pata Anguna* juga mengandung nilai-nilai gotong royong, kolaborasi, toleransi, bersahabat dan komunikatif, dan juga toleransi yang digunakan dalam memecahkan masalah.

## Prinsip Reaksi MPK-BM

Pembelajaran dengan menggunakan MPK-BM dilandasi oleh paradigma konstruktivisme, yakni pembelajaran berpusat pada siswa, sedangkan guru berperan sebagai *fasilitator, motivator, mediator* dan *evaluator* dalam pembelajaran. Sebagai *fasilitator*, guru menyediakan sumber-sumber belajar dan memberi bantuan agar siswa mampu menemukan konsep, aturan, hubungan-hubungan, dan struktur-struktur yang belum diketahui.

Sebagai *motivator*, guru memberikan motivasi setiap awal pembelajaran, untuk menumbuhkan minat siswa dalam belajar matematika. Ketika siswa bekerja menyelesaikan tugas-tugas, guru mengontrol jalannya diskusi dan memberikan motivasi agar siswa tetap berusaha menyelesaikan tugas-tugasnya. Sebagai *mediator*, guru adalah tempat bertanya bagi siswa apabila menemui kesulitan dalam mengidentifikasi dan merumuskan masalah, maupun pada saat menyelidiki dan menyelesaikan masalah. Guru memberikan bantuan secukupnya dan mendorong siswa untuk terus berusaha menemukan solusi dari setiap kesulitan yang dihadapi. Selama proses pembelajaran berlangsung, guru berkeliling untuk mengamati aktivitas siswa dalam melakukan seluruh aktivitas pemecahan masalah yang diberikan. Tingkah laku guru dalam menanggapi hasil pemikiran siswa berupa pertanyaan atau kesulitan yang dialami dalam menyelesaikan masalah harus bersifat mengarahkan, membimbing, memotivasi dan membangkitkan semangat belajar siswa. Sebagai *evaluator*, guru melakukan evaluasi atas pencapaian siswa yang bertujuan untuk mengetahui efektifitas masalah (*effectiveness of the problem*) yang diberikan kepada siswa, kualitas hasil karya siswa (*quality of students' work*), dan untuk memonitor kesuksesan belajar siswa.

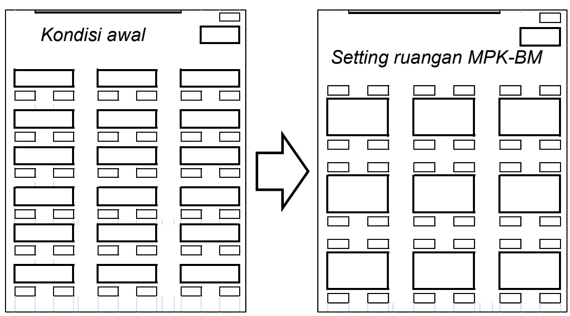
Guru harus memberikan kesempatan pada siswa untuk mengungkapkan hasil pemikirannya, mencermati pemahaman siswa atas objek matematika yang diperoleh dari proses dan hasil penyelesaian masalah, menunjukkan kelemahan atas pemahaman siswa dan memancing mereka menemukan jalan keluar untuk mendapatkan penyelesaian masalah yang sesungguhnya. Jika ada siswa yang bertanya guru terlebih dahulu memberi kesempatan pada siswa lainnya memberikan tanggapan dan merangkum hasilnya sebelum guru memberikan penjelasan/bantuan. Jika keseluruhan siswa mengalami kesulitan, maka guru langsung memberi penjelasan atau bantuan/memberi petunjuk sampai siswa dapat mengambil alih penyelesaian masalah pada langkah berikutnya.

## Sistem Pendukung MPK-BM

Sistem pendukung mendeskripsikan kondisi-kondisi yang mendukung yang seharusnya dibuat, direncanakan atau dimiliki oleh guru dalam menerapkan model pembelajaran. Sistem pendukung diperlukan agar model pembelajaran ini dapat terlaksana secara praktis dan efektif. Agar model pembelajaran kalkulus berbasis masalah ini dapat terlaksana secara praktis dan efektif, guru harus membuat suatu rancangan pembelajaran yang menggunakan masalah sebagai alat untuk membelajarkan siswa, yang diwujudkan dalam setiap langkah-langkah pembelajaran yang ditetapkan dan menyediakan fasilitas belajar yang cukup. Sistem pendukung mencakup pengkondisian lingkungan belajar (setting ruangan) dan fasilitas yang belajar yang diperlukan seperti ketersediaan masalah yang dapat digunakan dalam pembelajaran, ketersediaan rencana pembelajaran dan LKS yang membantu aktivitas siswa selama proses pembelajaran.

*Setting* ruangan (meja siswa) yang umumnya terdapat di sekolah masih kurang mendukung kegiatan diskusi. Hal tersebut menjadi salah satu tantangan dalam mengimplementasikan model pembelajaran ini. Oleh karena itu, penulis memberikan salah satu alternatif pengaturan ruangan kelas belajar agar tidak menghambat implementasi model pembelajaran ini. Pengaturan ruangan dapat dibuat sesuai dengan Gambar 4.

Gambar 4. Penataan Meja Siswa dalam MPK-BM




Pengaturan posisi meja dan kursi siswa seperti pada Gambar di atas dilakukan agar siswa lebih mudah dalam berinteraksi satu sama lain. Disamping itu, perhatian siswa tidak lagi terlalu banyak berfokus di depan kelas, tetapi saling berhadapan dengan rekan kelompoknya sehingga mudah dalam berkomunikasi. Pengaturan ruangan seperti Gambar 4 masih dapat dimodifikasi dan disesuaikan dengan kondisi ruangan belajar yang ada di sekolah.

## Dampak Penerapan MPK-BM

Pembelajaran yang dilaksanakan dengan menggunakan model pembelajaran kalkulus berbasis masalah (MPK-BM) diharapkan akan memberikan dampak yang positif bagi siswa. Dampak penerapan MPK-BM dalam pembelajaran matematika terdiri dari dampak langsung dan dampak tidak langsung (pengiring).

## *Dampak Langsung MPK-BM*

Dampak langsung pembelajaran dengan menggunakan MPK-BM adalah membantu siswa merekonstruksi konsep dan prinsip yang terdapat dalam materi kalkulus (limit fungsi, turunan fungsi, dan integral) melalui aktivitas pemecahan masalah. Pemahaman siswa terhadap objek-objek matematika dibangun berdasarkan pengalaman belajar yang telah dimiliki sebelumnya. Kebermaknaan pembelajaran yang melahirkan pemahaman, dan pemahaman mendasari kemampuan siswa mentransfer pengetahuannya dalam menyelesaikan masalah. Kemampuan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan materi kalkulus, kehidupan sehari-hari, maupun masalah yang berhubungan dengan disiplin ilmu lain menyadarkan siswa akan kebergunaan matematika bagi kehidupannya sehingga timbul motivasi dari dalam diri siswa untuk mempelajari matematika. Ringkasnya, dampak langsung MPK-BM ini dapat dilihat tercapainya tujuan pembelajaran yang telah ditentukan di awal pembelajaran.

## *Dampak Tidak Langsung MPK-BM*

Dampak tidak langsung pembelajaran yang dilaksanakan menggunakan MPK-BM adalah meningkatnya kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa sebagai akibat dari aktivitas pembelajaran yang memberi ruang kepada siswa untuk melatih kemampuan berpikirnya. Selain itu dengan penerapan nilai-nilai budaya dalam interaksi sosial akan membangun kesadaran siswa akan pentingnya nilai-nilai budaya dalam berinteraksi dengan sesama teman maupun kepada guru. Kesadaran terhadap nilai-nilai budaya tersebut juga berimplikasi pada penerimaan individu atas perbedaan-perbedaan yang terjadi. Perbedaan-perbedaan yang dimaksudkan dapat berupa perbedaan kemampuan antar siswa, perbedaan pendapat saat diskusi, bahkan perbedaan solusi masalah yang diberikan. Penerimaan yang diharapkan bukan berarti menerima ketika ada pendapat yang keliru, tetapi yang dimaksud penerimaan adalah cara siswa dalam menanggapi perbedaan yang ada dengan cara-cara yang santun sehingga siswa lainnya tidak merasa dijatuhkan atau dikecilkan oleh perbedaan atau kesalahan yang mereka buat.

# Bab 4

# Petunjuk Operasional Pelaksanaan MPK-BM

Pada bab ini penulis menyajikan operasional pelaksanaan model pembelajaran kalkulus berbasis masalah (MPK-BM) untuk memudahkan para pembaca dalam memahami model pembelajaran yang telah dikembangkan. Dalam bab ini juga diberikan beberapa contoh yang sekiranya dapat membantu pembaca dalam merencanakan pembelajaran dengan menggunakan model pembelajaran ini.

## Penerapan Sintaks MPK-BM

Setiap tahapan pada sintaks disusun secara operasional di dalam rencana pembelajaran untuk setiap pertemuannya. Dalam rencana pembelajaran dirumuskan kompetensi dasar (KD), indikator pencapaian kompetensi, materi prasyarat dan materi yang akan dipelajari. Secara garis besar, skenario kegiatan guru dan siswa untuk setiap tahapan pembelajaran beserta rincian waktu yang disediakan tertuang dalam rencana pembelajaran. Demikian pula strategi, metode, maupun teknik yang digunakan untuk mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan.

Skenario pembelajaran yang terdapat pada rencana pembelajaran disusun mengikuti setiap langkah-langkah pembelajaran (sintaks) MPK-BM yang terdiri dari 6 langkah, yaitu: (1) menyajikan masalah, (2) mengorganisasikan siswa untuk belajar, (3) mengidentifikasi dan merumuskan masalah, (4) menyelidiki dan menyelesaikan masalah, (5) menyajikan penyelesaian masalah dan (6) mengevaluasi dan menarik kesimpulan. Perlu ditekankan bahwa kegiatan yang dilakukan guru selama proses pembelajaran adalah sebagai fasilitator dan mediator. Guru tidak boleh terlalu mendominasi siswa dalam proses pembelajaran sehingga siswa memiliki kesempatan untuk mengkonstruksi pengetahuannya sekaligus menstimulasi kemampuan berpikir tingkat tingginya. Kegiatan yang dilakukan guru untuk setiap tahapan pembelajaran dijabarkan sebagai berikut:

1. Menyajikan Masalah
   a) Membuka kegiatan pembelajaran dengan mengucapkan salam, menyapa siswa dan mengajak siswa berdo'a.
   b) Menyampaikan tujuan pembelajaran yang akan dicapai siswa melalui MPK-BM pada materi kalkulus dengan menggunakan media *power point*.
   c) Memberikan apersepsi dengan memberikan pertanyaan untuk menguji pemahaman siswa tentang materi-materi prasyarat yang harus dikuasai.
   d) Memberikan motivasi tentang manfaat penting mempelajari materi kalkulus bagi kehidupan sehari-hari atau dalam disiplin ilmu lainnya.
   e) Menginformasikan pada siswa bahwa model pembelajaran yang digunakan adalah model pembelajaran kalkulus berbasis masalah, yaitu pembelajaran yang diawali dengan pengajuan masalah di awal pembelajaran. Kegiatan sangat penting untuk dilakukan agar seluruh siswa memahami langkah-langkah yang dilakukan selama proses pembelajaran.
   f) Mengajukan masalah yang berkaitan dengan kehidupan nyata, disiplin ilmu yang lain, termasuk masalah-masalah dalam kalkulus itu sendiri dengan menggunakan media LKS (masalah dalam bentuk narasi dan gambar), atau *proyektor* (masalah berupa gambar bergerak, atau tayangan video). Media yang digunakan dalam menyajikan masalah sebaiknya jangan monoton. Dalam hal ini, diselingi dengan media-media lainnya untuk menghindari kebosanan pada siswa.
2. Mengorganisasikan siswa untuk belajar
   a) Membagi siswa ke dalam kelompok kecil yang heterogen dan beranggotakan 4-5 orang siswa. Untuk mendukung kegiatan kolaborasi siswa dalam melakukan diskusi kelompok, maka posisi duduk siswa diarahkan untuk melingkar atau saling berhadapan sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5.
   b) Kegiatan guru selanjutnya adalah menjelaskan cara bekerjasama (kolaborasi) dengan teman dan cara berinteraksi dengan guru dalam aktivitas memecahkan masalah dengan menggunakan pola interaksi sosial yang berlandaskan nilai-nilai budaya sekaligus menanamkan nilai-nilai karakter positif.
   c) Apabila siswa sudah memahami nilai-nilai sosial budaya tersebut, maka guru tidak perlu menjelaskan terlalu detail pada setiap aspek-aspek tersebut, tetapi cukup dengan mengingatkan secara kontinu.

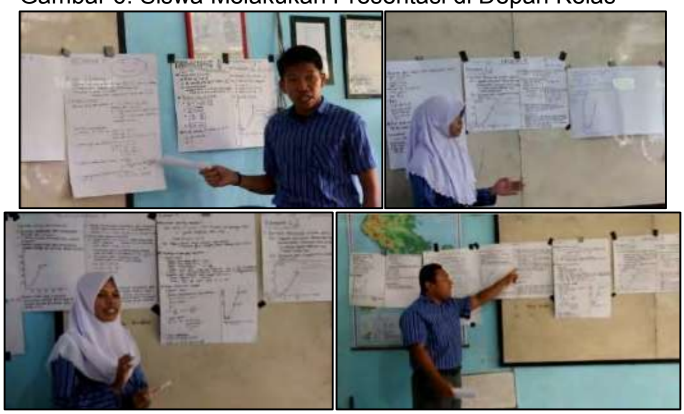
d) Membagikan LKS yang berguna untuk memfasilitasi siswa dalam menyelesaikan masalah.

Gambar 5. Siswa Duduk Saling Berhadapan

3. Mengidentifikasi dan merumuskan masalah
    a) Mengarahkan siswa untuk mengidentifikasi dan menuliskan informasi penting dalam masalah secara individu.
    b) Meminta siswa mendiskusikan dengan teman kelompoknya untuk mendapatkan rumusan masalah.
4. Menyelidiki dan menyelesaikan masalah
    a) Meminta siswa berdiskusi dan melakukan penyelidikan untuk menentukan strategi yang digunakan untuk menyelesaikan masalah.
        1) Meminta siswa untuk melakukan/ mengerjakan kegiatan-kegiatan dalam LKS secara sub kelompok.
        2) Berkeliling mengamati kerja siswa untuk membantu siswa yang mengalami kesulitan dalam melakukan/ mengerjakan kegiatan-kegiatan dalam LKS.
    b) Meminta siswa menentukan strategi yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah.
        1) Membantu kelompok yang mengalami kesulitan dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan yang mengarahkan siswa untuk menentukan strategi yang akan digunakan dalam menyelesaikan masalah.
    c) Meminta siswa berdiskusi untuk menentukan solusi dari masalah dengan menggunakan strategi yang telah ditetapkan sebelumnya.
        1) Berkeliling mengamati kegiatan diskusi.
        2) Membantu kelompok yang mengalami kesulitan dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan yang mengarahkan siswa untuk menyelesaikan masalah.
    d) Meminta siswa untuk menyiapkan presentasi hasil penyelesaian masalah.

5. Menyajikan penyelesaian masalah
   a) Memilih kelompok yang akan mempresentasikan hasil penyelesaian masalah berdasarkan keunikan hasil diskusi kelompok.
   b) Mempersilahkan siswa untuk mempresentasikan hasil penyelesaian masalah. Aktivitas presentasi dapat dilakukan dengan meminta siswa untuk menyiapkan slide presentasi, atau dengan meminta siswa untuk menuliskan pada sebuah kertas karton dan ditempelkan di depan kelas pada saat presentasi. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 6.

Gambar 6. Siswa Melakukan Presentasi di Depan Kelas



   c) Memberikan kesempatan kepada kelompok lain untuk mengkritisi hasil kerja kelompok penyaji dan menyampaikan tanggapan berupa pertanyaan atau masukan.
6. Mengevaluasi dan menarik kesimpulan
   a) Membantu siswa mengkaji ulang hasil pemecahan masalah dengan cara menafsirkan hasil yang diperoleh, menguji kebenaran hasil dan menganalisis kebenaran proses pemecahan masalah.
   b) Mengarahkan siswa untuk membuat kesimpulan dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan dan memberikan penguatan tentang konsep yang tepat dalam penyelesaian masalah.
   c) Menguji pemahaman siswa dengan memberikan pertanyaan terkait contoh dan bukan contoh yang berkaitan dengan konsep yang telah dipelajari.
   d) Menyampaikan materi yang akan dipelajari selanjutnya yaitu tentang sifat-sifat turunan fungsi.
   e) Menutup pembelajaran dengan salam

## Penerapan Sistem Sosial dalam MPK-BM

Untuk melaksanakan pembelajaran menggunakan MPK-BM dengan baik, diperlukan adanya kelompok-kelompok kecil pada siswa. Alasan utamanya adalah agar siswa dapat saling berbagi pengetahuan dan gagasan dalam kelompok belajar. Dengan kelompok, siswa belajar dari dan dengan orang lain. Situasi-situasi yang terjadi dalam proses bekerja kelompok juga akan membentuk berbagai kecakapan yang diperlukan siswa. Misalnya, kecakapan interpersonal, komunikasi, maupun kecakapan belajar itu sendiri. Model pembelajaran kalkulus berbasis masalah (MPK-BM) yang dikembangkan akan optimal bila guru dan siswa dapat mengelola pola interaksi antar-anggota kelompok, dan menempatkan diri atas masalah yang diberikan.

Kelompok belajar yang baik adalah kelompok yang dapat memotivasi anggotanya untuk terus belajar dan meningkatkan kecakapannya. Siswa belajar menganalisis masalah, saling berkomunikasi, berpikir, dan bekerja sama dalam kelompok. Kelompok yang baik juga dapat membuat anggotanya menyadari peran dan posisinya dalam kelompok. Kinerja masing-masing anggota maupun secara berkelompok sangat menentukan sukses tidaknya proses pembelajaran berbasis masalah. Oleh karena itu guru harus mengingatkan hal ini secara kontinu.

Gambar 7. Siswa berkolaborasi untuk Menyelesaikan Masalah


Gambar 8. Guru Mengontrol dan Membantu Siswa yang Kesulitan


Aktivitas siswa pada saat mengidentifikasi dan merumuskan masalah, dan pada kegiatan menyelidiki dan menyelesaikan masalah harus dikondisikan agar senantiasa terjadi kolaborasi dan setiap anggota kelompok terlibat dalam proses pembelajaran (lihat Gambar 7). Sementara itu, guru senantiasa mengontrol jalannya diskusi dan memberikan bantuan pada kelompok yang mengalami kesulitan (lihat Gambar 8).

Interaksi antar siswa dalam pembelajaran dengan terjadi pada saat diskusi kelompok. Pada saat itu, mereka berkesempatan berkolaborasi, saling mempertahankan pendapat, saling bertanya, saling membantu, menanggapi, dan membuat kesepakatan untuk menentukan strategi yang tepat dalam menyelesaikan masalah. Peran guru pada saat itu adalah membimbing, mengarahkan dan mengontrol jalannya diskusi. Adapun implementasi *Sara Pata Anguna* dalam MPK-BM dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Implementasi *Sara Pata Anguna* dalam MPK-BM

| **Nilai yang Terkandung** | **Implementasi dalam Pembelajaran** |
|---|---|
| 1. Tanggungjawab<br>2. Peduli lingkungan/sosial<br>3. Kolaborasi<br>4. Bersahabat/komunikatif<br>5. Toleransi | 1. Segan untuk melanggar hak-hak orang lain<br>2. Berkomunikasi dengan bahasa yang sopan.<br>3. Memberi perlakuan yang baik kepada sesama<br>4. Kerjasama dan kolaborasi yang saling membangun<br>5. Memberikan bantuan kepada yang kesulitan<br>6. Guru memposisikan dirinya sebagai orang tua bagi siswa<br>7. Penerimaan dan penghargaan atas perbedaan |

Dalam interaksi siswa dalam kelompok diskusi maupun berinteraksi dengan guru, para siswa diarahkan untuk memegang teguh nilai-nilai *sara pata-anguna* yang diajarkan oleh leluhur Buton, yang terdiri dari:

a. *Po mae-maeka* (saling segan atau takut untuk melanggar hak-hak orang lain). Segan atau takut yang dimaksudkan disini diwujudkan melalui cara berkomunikasi siswa kepada guru dengan menggunakan bahasa yang sopan. Disamping itu, siswa juga harus mengikuti arahan dari guru dalam setiap proses pembelajaran. Segan juga diwujudkan melalui sikap siswa yang berlaku sopan dan santun baik kepada guru, maupun dengan sesama siswa.

b. *Po pia-piara* (saling mengayomi dan melindungi) dan *po maa-maasiaka* (saling menyayangi). Pola interaksi sosial dengan menerapkan nilai-nilai diwujudkan dengan bentuk kerjasama dan kolaborasi yang saling membangun antara siswa yang satu dengan lainnya. Siswa saling membantu menyelesaikan permasalahan yang dihadapi melalui diskusi kelompok yang demokratis. Siswa yang lebih paham memberikan bantuan kepada teman kelompok yang belum memahami setiap materi yang dipelajari. Selain itu, nilai-nilai *Po pia-piara* dan *Po maa-maasiaka* diwujudkan guru dengan memposisikan dirinya sebagai orang tua bagi siswa. nilai-nilai tersebut dapat diaplikasikan pada saat memberikan bantuan kepada siswa maupun kelompok yang mengalami kesulitan. Dalam memberikan bantuan, guru menggunakan bahasa dan cara-cara yang santun agar siswa senantiasa termotivasi untuk belajar.

c. *Po angka-angkataka* (saling menghormati dan menghargai). Nilai-nilai *Po angka-angkataka* diwujudkan melalui perilaku siswa dalam menanggapi pendapat yang dikemukakan teman kelompok maupun kelompok lainnya. Setiap siswa harus menghargai setiap pendapat dan hasil yang diperoleh teman sekelompok maupun kelompok lain. Jika terdapat perbedaan pendapat atau hasil, maka setiap siswa harus memberikan tanggapan maupun sanggahan dengan cara yang santun.

## Penerapan Prinsip Reaksi dalam MPK-BM

Prinsip reaksi berkaitan dengan cara guru memperhatikan dan memperlakukan siswa, termasuk cara guru memberikan respon terhadap pertanyaan, jawaban, tanggapan atau apa yang dilakukan siswa selama proses pembelajaran. Pembelajaran dengan menggunakan MPK-BM dilandasi oleh teori konstruktivisme, dimana pembelajaran berpusat pada siswa sedangkan guru berperan sebagai *fasilitator, motivator, mediator* dan *evaluator* dalam pembelajaran. Untuk mewujudkan tingkah laku tersebut, guru harus memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengungkapkan hasil pemikirannya secara terbuka, mencermati pemahaman siswa, dan memancing siswa untuk menemukan jalan keluar atas masalah yang diberikan. Guru juga memberikan kesempatan kepada siswa untuk menanggapi dan memberikan masukan teman kelompoknya maupun terhadap kelompok lain.

### *Prinsip Reaksi Guru saat Memfasilitasi Proses Berpikir*

Saat memfasilitasi, guru memberikan mediasi dengan penuh selidik dan bertanya, untuk memperoleh konsep kunci, prinsip maupun teori. Guru selalu menjembatani dan menutup kesenjangan yang ada dalam menuntut siswa mempelajari apa yang penting dari masalah dan mendapatkan masalah terkait. Pada saat belajar kelompok, guru harus berusaha menciptakan suasana yang produktif dan menyenangkan. Guru juga mengawasi agar bahasan yang terjadi cukup komprehensif, dan kritis mengevaluasi informasi dan sumber-sumber materi yang digunakan.

Aktivitas guru dalam memfasilitasi harus menggali pendapat siswa lebih jauh dengan mengaitkan berbagai proses dalam pembelajaran berbasis masalah dengan pengetahuan siswa sebelumnya, pengalaman siswa sebelumnya, konteks dunia nyata yang akan dihadapi siswa, konsep atau teori yang ada, baik yang sudah dipelajari maupun yang belum, dan berbagai fakta dan gagasan yang ada seputar masalah yang sedang disajikan.

Guru dapat menggunakan pertanyaan-pertanyaan pada Tabel 4 untuk memfasilitasi proses berpikir siswa dalam pembelajaran kalkulus dengan menggunakan model pembelajaran kalkulus berbasis masalah (MPK-BM). Pertanyaan-pertanyaan tersebut dapat diajukan jika sebagian besar siswa mengalami kesulitan. Pertanyaan dapat diajukan pada saat siswa mengidentifikasi dan merumuskan masalah (fase II), menyelidiki dan menyelesaikan masalah (fase III) dan pada saat mengevaluasi dan menarik kesimpulan (fase VI).

## *Prinsip Reaksi Guru saat Menjelaskan/ Memberikan Informasi*

Prinsip reaksi guru saat menjelaskan/ memberi informasi, adalah menarik perhatian siswa agar memperhatikan penjelasan atau informasi yang diberikan. Ketika menginformasikan indikator, tujuan pembelajaran, memotivasi dan menjelaskan pola interaksi sosial budaya dalam proses pembelajaran, pastikan semua siswa mencermati dan memahami dengan baik. Untuk menjamin terwujudnya hal tersebut, guru dapat menggunakan kata-kata atau stimulus untuk menarik perhatian siswa. Demikian pula, pada saat guru menjelaskan maksud dari masalah. Hal ini dilakukan jika ada siswa atau salah satu kelompok yang belum paham maksud dari masalah tersebut.

Kebiasaan guru dalam transfer pengetahuan dalam memberikan informasi harus dihindari. Penjelasan yang diberikan terbatas pada menghantarkan siswa pada pemahaman terhadap konsep-konsep dan aturan-aturan yang terkait dengan pemecahan masalah. Pada saat merespon siswa yang mengajukan pertanyaan, guru terlebih dahulu memberikan kesempatan pada siswa yang lain untuk menanggapi dan memberikan masukan atas pertanyaan yang diajukan temannya.

Tabel 4.Contoh Pertanyaan untuk Memfasilitasi Siswa dalam MPK-BM

| Sintaks | Contoh pertanyaan yang dapat diajukan Guru |
|---|---|
| Mengidentifikasi dan merumuskan masalah (fase II) | 1. Apa yang dimaksud dengan kata mendekati pada soal cerita di atas?<br>2. Apakah nilai fungsi pada titik $x = c$ dapat ditentukan?<br>3. Bagaimana nilai fungsi di sekitar titik $x = c$? Apakah bisa ditentukan?<br>4. Bagaimana bentuk grafik fungsinya?<br>5. Bagaimana model matematika untuk menggambarkan fungsi tersebut?<br>6. Apa maksud kalimat menyinggung kurva?<br>7. Bagaimana kaitan antara kecepatan dengan turunan fungsi?<br>8. Apakah turunan fungsi tersebut dapat diselesaikan dengan konsep … ? |
| Menyelidiki dan menyelesaikan masalah (fase III) | 1. Apakah limit fungsi dapat ditentukan dengan metode …?<br>2. Mengapa limit fungsi tersebut tidak dapat ditentukan dengan metode …?<br>3. Apakah turunan fungsi dalam masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan …?<br>4. Mengapa menggunakan aturan … untuk menentukan turunan fungsi?<br>5. Apakah ada cara lain yang lebih efektif?<br>6. Bagaimana langkah-langkah menentukan turunan fungsi komposisi?<br>7. Rumus atau aturan apa yang bisa digunakan untuk menentukan turunan fungsi tersebut? |
| Mengevaluasi dan menarik kesimpulan (fase V) | 1. Apakah langkah-langkah yang kalian lakukan sudah benar?<br>2. Bagaimana limit fungsi … jika $x$ mendekati …?<br>3. Apakah turunan fungsi tersebut dapat ditentukan dengan konsep yang kita pelajari hari ini?<br>4. Konsep apa saja yang telah kita pelajari hari ini?<br>5. Jelaskan strategi yang telah kalian pelajari untuk menentukan limit fungsi.<br>6. Jelaskan strategi apa yang telah kalian pelajari untuk menentukan turunan fungsi. |

## Menyiapkan Sistem Pendukung MPK-BM

Selain pengaturan ruangan belajar sebagaimana yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya, diperlukan kumpulan masalah yang dirancang sesuai dengan karakteristik masalah MPK-BM. Lembar kegiatan siswa (LKS) juga dibutuhkan untuk memfasilitasi siswa selama proses pembelajaran (contoh LKS terlampir). Sementara itu, untuk memudahkan guru dalam mengelola pembelajaran, maka juga diperlukan rencana pelaksanaan pembelajaran (contoh RPP terlampir). Berikut diberikan beberapa contoh permasalahan yang dapat digunakan dalam MPK-BM.

## Contoh Masalah yang diberikan dalam Pembelajaran

| |
|---|
| **Masalah 1 (Limit Fungsi Aljabar)**<br>Sebuah perusahaan pengalengan ikan mampu memproduksi sebanyak 3000 kaleng ikan per hari dengan berat setiap kaleng adalah 250gr.<br>a. Jika Perusahaan tersebut beroperasi selama 6 hari dalam satu pekan, berapa banyak ikan kaleng yang dihasilkan jika perusahaan tersebut telah beroperasi selama hampir satu bulan?<br>b. Jika pada awal bulan berikutnya, pabrik mengoperasikan satu mesin tambahan yang mampu memproduksi sebanyak 150 kaleng ikan per hari, berapa banyak ikan kaleng yang dihasilkan perusahaan tersebut setelah beroperasi selama hampir dua bulan? |
| **Masalah 2 (Limit Fungsi di tak Hingga)**<br>Sebuah lahan pertanian mampu menghasilkan 30 ton padi pada tahun pertama pengolahan lahan tersebut. Pada tahun ke dua, terjadi penurunan jumlah panen menjadi 22,5 ton disebabkan adanya limbah pabrik yang mencemari kawasan persawahan. Seorang konsultan pertanian menemukan bahwa kesuburan tanah telah mengalami penurunan sehingga hasil panen pada lahan tersebut dari tahun pertama ke tahun-tahun berikutnya memenuhi fungsi $H(t) = 15 + \frac{15}{t}$, dengan *H* adalah hasil panen dalam ton, dan t adalah waktu dalam tahun. Petani yang mengolah lahan tersebut akan memperoleh laba jika hasil panen paling sedikit sebanyak 15 ton per tahun. Jika petani terus mengolah lahan tersebut, mungkinkah petani akan mengalami kerugian? Kemukakan alasanmu! |
| **Masalah 3. (Turunan Fungsi Aljabar)**<br>Pada sebuah kejuaraan balapan mobil Formula-1, diamati pergerakan setiap mobil balap. Pengamatan dilakukan oleh tim kemudian dilaporkan kepada sang pembalap setiap saat. Jarak tempuh salah satu mobil balap (dalam satuan puluhan meter) dari titik *start* pada 10 detik pertama diberikan oleh fungsi $f(t) = t^3$, dengan t adalah waktu tempuh $(0 \leq t \leq 10)$. Tentukan kecepatan mobil balap tersebut setelah 5 detik. |
| **Masalah 4. (Sifat-Sifat Turunan Fungsi)**<br>Seorang pemain bola menendang bola sehingga bola tersebut melambung dengan ketinggian $h$ meter dari permukaan tanah. Apabila ketinggian bola setelah $t$ detik adalah $H(t) = \frac{-2t^3+8t^2}{t}$ meter. Seorang pemain depan kesebelasan tersebut telah bersiap untuk menyundul bola (*heading*) ke arah gawang lawan. Jika pemain depan tersebut mampu melompat setinggi 40 cm, berapakah kecepatan bola sesaat sebelum menyentuh kepala pemain depan tersebut? |
| **Masalah 5. (Turunan Fungsi Trigonometri)**<br>Pada sebuah taman bermain terdapat sebuah *roller coaster* dengan bentuk seperti tampak pada gambar di samping. Andaikan ketinggian lintasan salah satu bagian *roller coaster* pada saat $t$ detik dari titik awal pengamatan adalah $f(t) = \sin t$ dimana $f(t)$ adalah ketinggian *roller coaster* (dalam satuan puluhan meter). Gambarkan grafik fungsi $f(t)$ kemudian tentukan kemiringan bagian *roller coaster* pada saat t detik!<br> |

**<u>Masalah 6.</u> (Turunan Fungsi Komposisi)**
Seorang pemilik toko sembako mendapatkan keuntungan tahunan sebesar $f(t) = \sqrt{t^2 + 24t}$ juta rupiah t tahun sejak didirikan. Jika laju pertambahan keuntungan tahunan perusahaan ditentukan oleh $f'(t)$. Tentukan pertambahan rata-rata keuntungan perusahaan pada saat $\mathrm{t} = 1$.

**<u>Masalah 7.</u> (Gradien Garis Singgung Kurva)**
Sebuah perusahaan pengalengan ikan memproduksi sebanyak $N(x) = x^2 - 2x + 3$ kaleng ikan dengan $x$ adalah jumlah tangkapan ikan (dalam satuan kilogram). Berdasarkan ilustrasi tersebut, gambarkan grafik fungsi yang menunjukkan keadaan produksi ikan kaleng, kemudian tentukan persamaan garis singgung kurva yang melalui titik $(4,11)$.

**<u>Masalah 8.</u> (Fungsi Naik, Fungsi Turun dan Titik Stasioner)**
Lintasan *roller coaster* pada suatu arena permainan memiliki bentuk seperti tampak pada gambar di samping. Sebuah r*oller coaster* meluncur diatas lintasan tersebut (dari sebelah kiri ke kanan gambar) dan melalui lintasan menanjak dan menurun. Andaikan lintasan tersebut dianggap sebagai grafik suatu fungsi $f(x)$ dengan $f$ adalah ketinggian dan $x$ adalah jarak mendatar yang dilalui, tunjukkan saat dimana grafik fungsi tersebut naik atau turun.


**<u>Masalah 9.</u> (Nilai Maksimum Dan Minimum Fungsi Dalam Interval Tertutup)**
Populasi suatu daerah $t$ tahun mendatang dinyatakan oleh persamaan

$$P(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t + 3 \text{ ratus ribu jiwa.}$$

Berdasarkan informasi tersebut, tentukan besar populasi maksimum dan minimum dalam kurun waktu 5 tahun akan datang.

**<u>Masalah 10.</u> (Menggambar Grafik Fungsi Aljabar)**
Sebuah peluru ditembakkan ke udara sehingga membentuk sebuah grafik fungsi $f(x) = -x^2 + 4x$. Gambarkan grafik fungsi tersebut pada bidang *cartesius*, kemudian jelaskan bentuk kecekungan grafik fungsi tersebut.

**<u>Masalah 11.</u> (Membuat Model Matematika)**
Seorang pria dengan tinggi 6 kaki berjalan dengan kecepatan 3 kaki/detik menjauhi sebuah tiang lampu jalan dengan ketinggian 12 kaki di atas tanah. Berapa kecepatan perubahan panjang bayangan pria tersebut, pada saat ia berada pada jarak 20 kaki dari tiang lampu tersebut?

**<u>Masalah 12.</u> (Aplikasi Turunan dalam Pemecahan Masalah)**
Pertumbuhan penduduk di suatu daerah, t tahun dari sekarang diperkirakan akan menjadi $N(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 200$ ribu jiwa. Berapa kecepatan pertumbuhan penduduk di daerah tersebut 3 tahun yang akan datang?

# Bab 5

# Ruang Lingkup Materi Kalkulus SMA

## Ruang Lingkup Materi Kalkulus SMA

Kalkulus merupakan salah satu kompetensi yang harus dikuasai siswa dalam pembelajaran di sekolah tingkat menengah. Menurut Varberg, Purcell, & Rigdon (2007) "*calculus is the study of limits*". Sementara itu, Stewart (2009) menjelaskan bahwa kalkulus berhubungan dengan perubahan dan pergerakan, atau besaran yang berhubungan dengan besaran lainnya. Ruang lingkup materi Kalkulus yang dipelajari di SMA mencakup limit dan turunan fungsi (kelas XI) dan Integral fungsi (kelas XII). Adapun pembahasan materi Kalkulus dalam buku ini dikembangkan berdasarkan Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar pada Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP).

## Memahami Limit Fungsi secara Intuitif

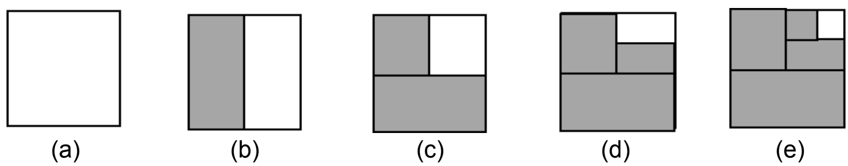
Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering mendengar atau mengucapkan kata "hampir", "sedikit lagi", "nyaris", "mendekati", atau kata lain yang semakna dengan kata-kata tersebut. Perhatikan beberapa contoh pernyataan berikut!

1. *Sebuah mobil nyaris tertabrak kereta api,*
2. *Persediaan bahan bakar hampir habis*
3. *Peserta lomba saat ini mendekati garis finish*

Dari beberapa contoh di atas, kata-kata "nyaris tertabrak", "hampir habis", atau "mendekati garis *finish*" tersebut menunjukkan suatu keadaan dimana subjek atau objek yang sedang dibicarakan tidak "**benar-benar telah**" atau "sampai" pada suatu kondisi yang dikenakan terhadap subjek atau objek tersebut. Dalam matematika konsep limit digunakan untuk melakukan estimasi terhadap perilaku suatu fenomena yang sedang diamati. Untuk lebih jelasnya berikut uraian materi mengenai limit selengkapnya.

## Konsep Limit Menggunakan Persegi Satuan

Perhatikan persegi-persegi berikut!



Andaikan daerah persegi (a) memiliki ukuran sisi 1 satuan, maka

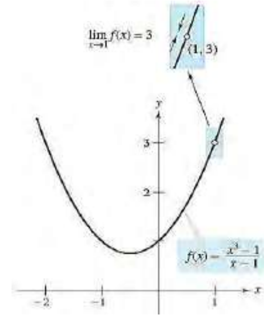
- Luas daerah persegi (a) adalah 1 satuan luas.
- Luas daerah arsiran pada persegi (b) adalah $\frac{1}{2}$ satuan luas.
- Luas daerah arsiran pada persegi (c) adalah $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ satuan luas.
- Luas daerah arsiran pada persegi (d) adalah $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ satuan luas.
- Luas daerah arsiran pada persegi (e) adalah $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ satuan luas.

Apabila persegi satuan diatas terus dibagi, maka luas daerah bagian persegi yang diarsir akan mendekati 1 satuan luas. Jadi, penjumlahan: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ mendekati 1.

## Konsep Limit dengan Pendekatan Numerik dan Grafis

Misalkan kita akan menggambarkan grafik fungsi *f* yang didefinisikan oleh $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$, dengan domain $D_f=\{x|x\in R, x\neq 1\}$. Dengan menggunakan pendekatan numerik, kita dapat menentukan nilai fungsi untuk semua nilai $x$ selain $x=1$. Akan tetapi kita dapat menentukan nilai fungsi f di sekitar titik $x=1$ seperti tampak pada tabel berikut:

| $x$ | 0,75 | 0,9 | 0,99 | 0,999 | … | $x\to 1$ | … | 1,001 | 1,01 | 1,1 | 1,25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,313 | 2,710 | 2,970 | 2,997 | … | $f(x)\to 3$ | … | 3,003 | 3,030 | 3,310 | 3,813 |




Jika nilai-nilai fungsi *f* disketsa pada diagram *cartesius*, maka akan diperoleh gambaran grafik fungsi $f$ pada saat $x$ mendekati 1. Adapun grafik fungsi $f$ diperlihatkan pada gambar di samping.

Berdasarkan tabel numerik di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $x$ mendekati 1 baik dari kiri maupun dari kanan, nilai fungsi *f* makin mendekati 3. Akan tetapi untuk $x = 1$, nilai $f(x)$ tak tentu. Hal tersebut ditunjukkan dengan grafik fungsi $f$ yang terputus pada titik $(1,3)$. Namun pada saat nilai $x$ dekat dengan 1, nilai fungsi $f$ dekat dengan 3.

Berdasarkan uraian diatas, dapat dikatakan bahwa limit $f(x)$ untuk $x$mendekati 1 sama dengan 3, dan ditulis dengan notasi

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$$

Pengertian limit yang seperti inilah yang disebut pengertian limit secara intuitif, yang secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut.

Jika $f(x)$ mendekati suatu nilai $L$ pada saat $x$ dekat (tetapi berlainan) dengan $c$ dari kedua sisi (arah kiri maupun kanan), maka **limit dari** $f(x)$ pada saat $x$ mendekati $c$ adalah $L$, dan ditulis dengan notasi.

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

Suatu hal yang mesti dicermati di sini adalah notasi "=" (sama dengan) dalam konsep limit berbeda dengan pengertian "sama dengan" dalam suatu persamaan. Dalam pembahasan tentang limit, pengertian "sama dengan" lebih banyak diartikan sebagai nilai yang didekati.

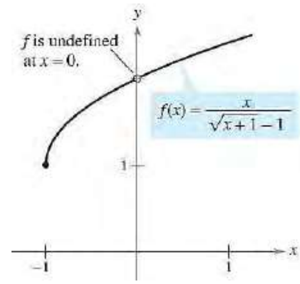
***Contoh:***

Evaluasi fungsi $f(x)\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ pada beberapa titik di dekat $x = 0$ kemudian gunakan hasil tersebut untuk menentukan $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$!

**Solusi:**

Tabel di samping menyajikan nilai-nilai fungsi $f$ dengan nilai $x$ di dekat 0. Sementara itu, grafik fungsi memberikan gambaran mengenai kondisi kurva $f(x)$ di sekitar $x = 0$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| -0,01 | 1,99499 |
| -0,001 | 1,99950 |
| -0,0001 | 1,99995 |
| -0,00001 | 1,999995 |
| ... | ... |
| $x \to 0$ | $f(x) \to 2$ |
| ... | ... |
| 0,00001 | 2,000005 |
| 0,0001 | 2,00005 |
| 0,001 | 2,00050 |
| 0,01 | 2,00499 |




Berdasarkan tabel numerik terlihat bahwa pada saat $x$ mendekati 0, nilai fungsi $f$ mendekati 2, sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = 2$$

**Catatan:**

*Eksistensi nilai suatu fungsi pada titik $x = c$ tidak menjamin eksistensi limit fungsi tersebut di sekitar $x = c$.*

## Limit kiri dan Limit Kanan

Terkadang nilai suatu fungsi $f\,(x)$ menuju ke limit-limitnya berbeda nilainya bila $x$ mendekati suatu bilangan $c$ dari arah yang berbeda pula. Apabila hal ini terjadi, maka kita menyebut limit dari $f\,(x)$ bila $x$ mendekati c dari arah kanan sebagai **limit-kanan** dari $f$ ke $c$ dan ditulis dengan notasi $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, dan sebaliknya jika bila $x$ mendekati c dari arah kiri disebut **limit-kiri** dari $f$ ke $c$ dan ditulis dengan notasi $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$. Sesuai dengan pengertian limit secara intuitif di atas, maka limit fungsi $f$ pada saat $x$ mendekati $c$ adalah $L$ jika **limit-kiri** $f$ ke c sama dengan **limit-kanan** $f$ ke $c$, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

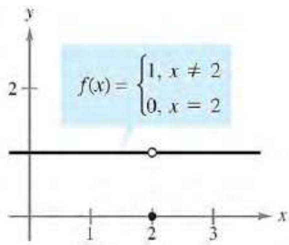
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \mathrm{L} \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{L}$$

**Contoh:**

Tentukan limit $f(x)$ untuk $x$ mendekati 2, jika *f* didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \neq 2 \\ 0, x = 2 \end{cases}$$

***Solusi:***



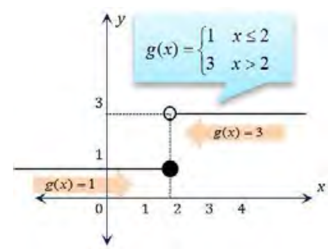

Karena $f(x) = 1$ untuk semua $x$ selain $x = 2$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ dan $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ sehingga $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

Meskipun $f(2) = 0$, namun hal tersebut tidak berarti bahwa limit fungsi *f* saat *x* mendekati 2 adalah 0.

***Contoh : (kasus limit kiri ≠ limit kanan)***

Tentukan $\lim_{x\to 2} g(x)$, jika fungsi $g$ didefinisikan sebagai

$$g(x) = \begin{cases} 1, x \leq 2 \\ 3, x > 2 \end{cases}$$




***Solusi:***

limit fungsi $g(x)$ saat $x$ mendekati 2 dari arah kiri adalah 1, sedangkan limit fungsi $g(x)$ saat $x$ mendekati 2 dari arah kanan adalah 3, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 1$ dan $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 3$ *(limit kiri ≠ limit kanan)*

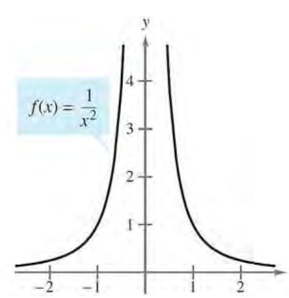
Karena $\lim_{x\to 2^-} g(x) \neq \lim_{x\to 2^+} g(x)$ maka limit fungsi *g*(*x*) saat *x* mendekati 2 tidak ada.

***Contoh: (kasus fungsi tak terbatas)***

Selidiki eksistensi $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$!

***Solusi:***

Grafik fungsi di samping menunjukkan bahwa pada saat $x$ mendekati 0 dari kedua sisi (kanan dan kiri), $f(x)$ membesar tanpa batas. Hal ini berarti bahwa dengan memilih $x$ cukup dekat dengan 0, kita dapat menemukan $f(x)$ yang membesar sesuai dengan $x$ yang dipilih.



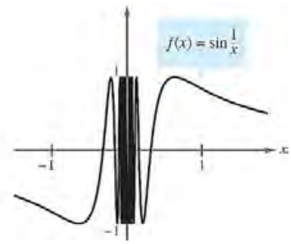

$0 < |x| < \frac{1}{10} \Rightarrow f(x) > 100,$

$0 < |x| < \frac{1}{1000} \Rightarrow f(x) > 1.000.000$

Karena $f(x)$ tidak mendekati bilangan real tertentu pada saat $x$ mendekati 0, maka limit fungsi $f$ pada saat $x$ mendekati 0 tidak ada.

***Contoh: (kasus fungsi yang berosilasi)***

Selidiki eksistensi $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$!

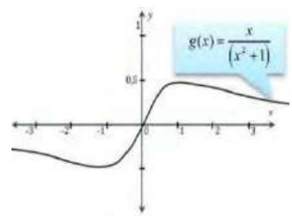



***Solusi:***

Grafik fungsi di samping menunjukkan bahwa pada saat $x$ mendekati 0 dari kedua sisi (kanan dan kiri),$f(x)$ berosilasi antara -1 dan 1. Oleh karena itu, limit fungsi $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ pada saat $x$ mendekati 0 tidak ada.

***Limit di Tak Hingga***

Andaikan $g(x) = \frac{x}{(x^2+1)}$ dengan grafik fungsi yang ditunjukkan pada gambar di samping. Apakah yang akan terjadi pada fungsi $g(x)$ jika $x$ semakin membesar?. Hal tersebut sama dengan menanyakan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.




***Catatan:***

*$x \to \infty$" tidak berarti bahwa $x$ sangat besar, atau menunjuk suatu bilangan tertentu. Akan tetapi $x$ mendekati bilangan yang besar.*

Nilai fungsi g pada saat $x$ membesar diberikan pada tabel numerik berikut.

| **x** | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 | … | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **g(x)** | 0,099 | 0,010 | 0,001 | 0,0001 | 0,00001 | 0,000001 | … | $g(x) \to 0$ |

Berdasarkan tabel numerik dan grafik fungsi $g(x) = \frac{x}{\left(x^2+1\right)}$ di atas, menunjukan bahwa pada saat $x$ mendekati tak hingga ( $x \to \infty$ ) nilai fungsi $g(x)$ mendekati 0. Dituliskan $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ .Limit suatu fungsi $g(x)$ saat $x$ membesar atau mengecil tanpa batas disebut sebagai limit di tak hingga. Secara umum limit fungsi dari $f(x) = \frac{1}{x^n}$ dengan *n* bilangan bulat positif ( $n \in B^+$ ) untuk $x$ mendekati tak hingga atau minus tak hingga sama dengan nol, dituliskan:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) = 0 \text{, dan } \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$$

## Aturan untuk menyelesaikan limit di tak hingga:

Bila $f(x)$ merupakan fungsi rasional, misal $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ dengan $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan polinomial. Maka untuk menyelesaikan limit di tak hingga dari $f(x)$ dilakukan dengan cara sebagai berikut:

a. Pangkat $p(x)$ ≤ pangkat $q(x)$. Dilakukan dengan membagi pembilang dan penyebut dengan variabel x dengan pangkat tertinggi yang terdapat pada penyebut.
   Pangkat $p(x)$ > pangkat $q(x)$. Dilakukan dengan membagi pembilang dengan penyebut terlebih dahulu sehingga diperoleh suku rasional dengan pangkat pembilang kurang dari atau sama dengan pangkat penyebut.
b. Setelah langkah pertama selesai, maka langkah selanjutnya menentukan limitnya dengan menggunakan bentuk umum di atas.

***Contoh:***

Tentukan limit fungsi berikut:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-3x}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{2x^2+3x+5}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{x-1}$

***Solusi:***

a. Pangkat penyebut lebih besar dari pangkat pembilang, sehingga dilakukan pembagian terhadap pembilang dan penyebut dengan $x^2$, sehingga

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{x}{x^2}}{\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

b. Pangkat penyebut sama dengan pangkat pembilang, sehingga dilakukan pembagian terhadap pembilang dan penyebut dengan $x^2$, sehingga diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{2x^2+3x+5}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}\right)}{\left(\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{\left(2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}\right]=\frac{0-1}{2+0+0}=\frac{-1}{2}$$

c. Pangkat pembilang lebih besar dari pangkat penyebut, sehingga dilakukan pembagian terlebih dahulu terhadap pembilang dengan $(x - 1)$ sehingga diperoleh:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{x-2}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}x+\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x-1}$$
$$=\infty+\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)}\right]=\infty+\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right]=\infty+\left(\frac{1-0}{1-0}\right)=\infty+1=\infty$$

## *Menentukan Limit Fungsi secara Analitis*

### Sifat-sifat Limit

Pada pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa limit fungsi $f(x)$ pada saat *x* mendekati *c* memiliki arti yang berbeda dengan nilai $f$ pada saat $x = c$. Meski demikian, pada kasus tertentu (fungsi kontinu) limit fungsi dapat ditentukan dengan menggunakan substitusi langsung atau dapat dituliskan $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Fungsi yang kontinu pada suatu titik memiliki nilai limit fungsi yang sama dengan nilai fungsinya pada tersebut.

#### *Bentuk-Bentuk Dasar Limit Fungsi*

Andaikan *b* dan *c* adalah bilangan real dan *n* adalah bilangan bulat positif,

1. $\lim_{x\to c} b = b$ 2. $\lim_{x\to c} x = c$ 3. $\lim_{x\to c} x^n = c^n$

#### *Contoh: (Bentuk Dasar Limit Fungsi)*

a. $\lim_{x\to 2} 4 = 4$ b. $\lim_{x\to -3} x = -3$ c. $\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$

***Sifat-sifat Limit Fungsi***

Andaikan *b* dan *c* adalah bilangan real, *n* adalah bilangan bulat positif, dan misalkan *f* dan *g* adalah sebuah fungsi dengan limit didefinisikan sebagai: $\lim_{x\to c} f(x) = K$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = L$,

1. **Perkalian dengan skalar** : $\lim_{x\to c}\left[b.f(x)\right] = b.L$
2. **Jumlah atau selisih** : $\lim_{x\to c}\left[f(x) \pm g(x)\right] = K \pm L$
3. **Hasil kali** : $\lim_{x\to c}\left[f(x).g(x)\right] = K.L$
4. **Hasil bagi** : $\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{K}{L}$, dengan $L \neq 0$
5. **Perpangkatan** : $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n = K^n$

***Contoh: (Limit Fungsi Polynomial)***

a. $\lim_{x\to 2}\left(4x^2+3\right) = \lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 3$ (sifat 2)

= $4\left(\lim_{x\to 2} x^2\right) + \lim_{x\to 2} 3$ (sifat 1)

= $4\left(2^2\right) + 3$ (bentuk dasar limit)

= $19$

Limit fungsi suatu polinomial dapat pula ditentukan dengan melakukan substitusi langsung nilai pendekatan $x$ pada polynomial tersebut, yakni:

$$\lim_{x\to 2} p(x) = p(2) = 4(2^2) + 3 = 19$$

Aturan substitusi tersebut dapat digunakan untuk semua polinomial dan juga fungsi rasional dengan penyebut tidak nol (*nonzero denominators*).

***Limit Polinomial dan Fungsi Rasional***

1. Jika $p$ adalah polinomial, dan *c* adalah bilangan real, maka:

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

2. Jika *r* adalah fungsi rasional yang didefinisikan oleh $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, dan *c* adalah bilangan real sedemikian hingga $q(c) \neq 0$, maka:

$$\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

***Contoh: (Limit Fungsi Rasional)***

Tentukan $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$!

Solusi: karena penyebut dari fungsi rasional di atas tidak nol pada saat $x = 1$, maka kita dapat menggunakan aturan substitusi limit fungsi rasional di atas, sehingga diperoleh:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x+1}=\frac{1^2+1+2}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

Fungsi polinomial dan fungsi rasional adalah 2 dari 3 bentuk dasar fungsi aljabar. Adapun bentuk lain dari fungsi aljabar adalah fungsi yang melibatkan bentuk akar.

***Limit dari Fungsi yang Melibatkan Bentuk Akar***

Andaikan *n* adalah bilangan bulat positif, maka aturan limit berikut berlaku untuk semua *c* jika *n* genap, dan berlaku untuk $c > 0$ jika *n* ganjil.

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{c}$$

***Contoh: (Limit Fungsi yang Melibatkan Bentuk Akar)***

a. $\lim_{x\to 9}\sqrt[2]{x}=\sqrt[2]{9}=3$  b. $\lim_{x\to -8}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{-8}=-2$

***Limit Fungsi Komposit***

Jika *f* dan *g* adalah fungsi sedemikian hingga $\lim_{x\to c} g(x)=L$, dan $\lim_{x\to L} f(x)=f(L)$, maka

$$\lim_{x\to c} f\left(g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)=f(L)$$

***Limit Fungsi Trigonometri dan Transenden***

Andaikan *c* adalah bilangan real pada domain dari fungsi trigonometri berikut.

1 $\lim_{x\to c}\sin x=\sin c$

2 $\lim_{x\to c}\cos x=\cos c$

3 $\lim_{x\to c}\tan x=\tan c$

4 $\lim_{x\to c}\cot x=\cot c$

5. $\lim_{x\to c}\sec x=\sec c$

6. $\lim_{x\to c}\csc x=\csc c$

7. $\lim_{x\to c}a^x=a^c$, $(a>0)$

8. $\lim_{x\to c}(\ln x)=\ln c$

*Contoh: (Limit Fungsi Trigonometri dan Transenden)*

a. $\lim_{x\to 0}\sin x = \sin(0) = 0$

b. $\lim_{x\to \pi} x.\cos x = \left(\lim_{x\to\pi} x\right)\left(\lim_{x\to\pi}\cos x\right) = \pi.\cos(\pi) = \pi.\,(-1) = -\pi$

c. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x^2+1} = \dfrac{\lim_{x\to 0}\tan x}{\lim_{x\to 0} x^2+1} = \dfrac{\tan(0)}{0^2+1} = \dfrac{0}{1} = 0$

d. $\lim_{x\to 2}(2+\ln x) = \lim_{x\to 2} 2 + \lim_{x\to 2}(\ln x) = 2 + \ln 2$

## *Strategi Menentukan Limit Fungsi*

Pada pembahasan sebelumnya, telah dibahas cara menentukan limit fungsi dengan substitusi langsung. Pengetahuan tersebut dan bersama dengan aturan berikut dapat kita gunakan ini untuk mengembangkan cara menemukan limit suatu fungsi.

*Fungsi yang Senilai namun Berbeda pada Suatu Titik*

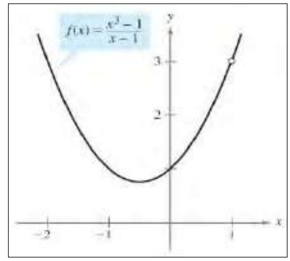
Andaikan *c* adalah bilangan real dan andaikan $f(x) = g(x)$ pada suatu interval buka yang memuat $c$. Jika limit dari $g(x)$ pada saat $x$ mendekati $c$ ada, maka limit dari $f(x)$ saat $x$ mendekati $c$ juga ada, dan

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)\,.$$

*Contoh: (menggunakan fungsi yang senilai)*

Tentukan limit dari $f(x)$ pada saat $x$ mendekati 1, jika $f$ didefinisikan sebagai:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}, \text{ dengan } x\neq 1$$

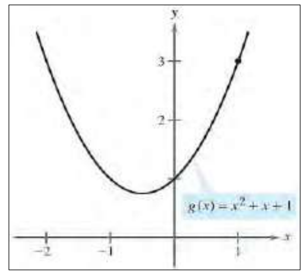



***Solusi:***

Dengan melakukan pemfaktoran dan pembagian, fungsi $f$ dapat dituliskan kembali menjadi:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}}=x^2+x+1=g(x),$$

dengan $x\neq 1$. Untuk semua nilai $x$ selain $x=1$, fungsi $f$ dan $g$ bernilai sama, sebagaimana ditunjukkan pada gambar.




Karena $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ ada, maka limit fungsi $f$ dapat ditemukan dan nilainya sama dengan $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)} && \text{(pemfaktoran)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}} && \text{(membagi faktor yang sama)}\\
&= \lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right) && \text{(menggunakan aturan fungsi senilai)}\\
&= 1^2+1+1 && \text{(substitusi langsung)}\\
&= 3
\end{aligned}$$

Berdasarkan beberapa contoh di atas, diperoleh beberapa strategi yang bisa digunakan untuk menemukan limit fungsi adalah sebagai berikut:

***Strategi untuk Menemukan Limit***

1. Gunakan aturan substitusi langsung
2. Jika limit $f(x)$ untuk $x$ mendekati $c$ tidak dapat ditentukan dengan menggunakan aturan substitusi langsung, coba cari fungsi g yang senilai dengan $f$ untuk semua $x$ selain $x=c$
   [pilih fungsi $g$ yang dapat ditentukan limitnya dengan menggunakan substitusi langsung].
3. Gunakan grafik atau tabel (cara numerik) untuk memperkuat hasil yang diperoleh.

***Menentukan Limit Fungsi dengan Membagi Faktor yang Sama dan Merasionalkan***

Contoh berikut akan memberikan gambaran tentang teknik untuk menentukan limit suatu fungsi.

***<u>Contoh: (membagi faktor yang sama)</u>***

Tentukan limit $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$!

***<u>Solusi:</u>***

Meskipun bentuk fungsi yang diberikan merupakan fungsi rasional, akan tetapi limit fungsi pembilang dan penyebut untuk x mendekati -3 adalah 0 ( $\lim_{x \to -3}\left(x^2 + x - 6\right) = 0$ dan $\lim_{x \to -3}\left(x + 3\right) = 0$ ), sehingga aturan substitusi langsung tidak dapat digunakan.

Selanjutnya, karena pembilang dan penyebut memiliki faktor yang sama, yakni $(x+3)$, maka untuk $x \neq 3$ kita dapat membagi faktor tersebut, sehingga:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} \quad \text{(pemfaktoran)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}} \quad \text{(membagi faktor yang sama)}\\
&= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) \quad \text{(menggunakan aturan fungsi senilai)}\\
&= 1^2+1+1 \quad \text{(substitusi langsung)}\\
&= 3
\end{aligned}
$$

***Contoh:***

Tentukan limit: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ !

***Solusi:***

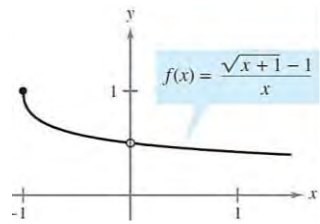
Fungsi yang diberikan merupakan fungsi rasional, akan tetapi limit fungsi pembilang dan penyebut untuk $x$ mendekati 0 adalah 0 ( $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}-1=0$ , dan $\lim_{x\to 0}x=0$ ) sehingga aturan substitusi langsung tidak dapat digunakan.

Pada kasus ini, kita dapat menuliskan kembali bentuk pecahan tersebut dengan merasionalkan pembilangnya, sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\\
&= \frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\\
&= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan prinsip fungsi yang senilai, maka:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{0+1}+1}, \quad \text{(aturan substitusi)}$$
$$= \frac{1}{1+1}$$
$$= \frac{1}{2}$$




Gambar di atas menunjukan bahwa pada saat nilai $x$ mendekati 0, nilai $f$ mendekati $\frac{1}{2}$. Tabel numerik di bawah ini juga dapat digunakan untuk memperkuat hasil tersebut.

| $x$ | -0,25 | -0,01 | -0,001 | … | $x \to 0$ | … | 0,001 | 0,01 | 0,25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,536 | 0,501 | 0,500 | … | $f(x) \to \frac{1}{2}$ | … | 0,499 | 0,498 | 0,4721 |

Berdasarkan gambar dan tabel numerik disimpulkan bahwa $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$

## *Teorema Apit*

Jika $h(x) \le f(x) \le g(x)$ untuk setiap $x$ pada suatu interval terbuka yang mengandung *c*, kecuali pada $x = c$, dan jika $\lim_{x\to c} h(x) = L = \lim_{x\to c} g(x)$ , maka $f(x)$ untuk $x$ mendekati *c* **ada** yaitu $\lim_{x\to c} f(x) = L$ .

Teorema Apit digunakan untuk menunjukkan bentuk khusus limit trigonometri berikut

## *Limit Fungsi Trigonometri (Bentuk Khusus)*

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

***Contoh:***

Tentukan limit fungsi berikut

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$

***Solusi:***

a. Substitusi langsung tidak dapat digunakan untuk menentukan $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

Oleh karena itu bentuk limit fungsi di atas ditulis kembali dengan menggunakan identitas trigonometri:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \left[ \frac{\left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)}{x} \right] = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\sin}{x} . \frac{1}{\cos x} \right)$$

Karena $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, dan $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$, maka:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \left( \lim_{x \to 0} \frac{\sin}{x} \right) \left( \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \times 1 = 1$$

Jadi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

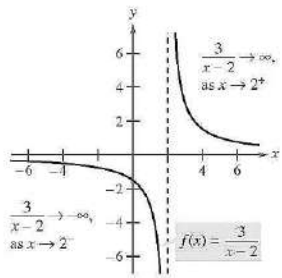
b. Substitusi langsung juga tidak dapat digunakan untuk menentukan $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$. Oleh karena itu bentuk limit fungsi di atas ditulis kembali dengan melakukan manipulasi aljabar:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x} &= \lim_{x \to 0} \left( \frac{4}{4} \right) \left( \frac{\sin 4x}{x} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} \\
&= 4 \left( \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \right) \\
&= 4(1) = 4
\end{aligned}$$

Jadi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x} = 4$

## *Limit Tak Hingga*

Andaikan f adalah fungsi yang didefinisikan $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$.




Grafik fungsi $f$ ditunjukkan pada Gambar di atas. Sedangkan nilai fungsi f pada saat $x$ mendekati 2 diberikan pada tabel numerik berikut.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1,5 | 1,9 | 1,99 | 1,999 | … | $x \to 2$ | … | 2,001 | 2,01 | 2,1 | 2,5 |
| $f(x)$ | -6 | -30 | -300 | -3000 | … | ? | … | 3000 | 300 | 30 | 6 |

Berdasarkan grafik fungsi dan tabel numerik di atas, terlihat bahwa $f(x)$ mengecil tanpa batas pada saat $x$ mendekati 2 dari arah kiri, dan $f(x)$ membesar tanpa batas pada saat $x$ mendekati 2 dari arah kanan. Perilaku fungsi yang demikian dituliskan sebagai:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = -\infty$ ➔ $f(x)$ mengecil tanpa batas pada untuk t $x$ mendekati 2 dari kiri

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{x-2} = \infty$ ➔ $f(x)$ membesar tanpa batas untuk $x$ mendekati 2 dari kanan

Limit suatu fungsi $f(x)$ yang memiliki perilaku membesar atau mengecil tanpa batas pada saat $x$ mendekati suatu nilai tertentu (misalkan $c$) disebut sebagai **limit takhingga.**

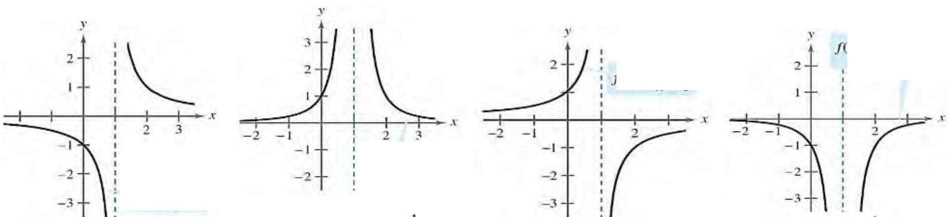
***Catatan:***

Pernyataan $\lim f(x) = \infty$ atau $\lim f(x) = -\infty$ tidak berarti bahwa limit fungsi tersebut ada. Simbol "∞" yang dibaca "takhingga", digunakan untuk melambangkan bilangan yang sangat besar yang tak dapat ditentukan besarnya, tetapi simbol ini tidak menunjuk suatu bilangan yang manapun.

***Contoh:***

Gunakan gambar berikut untuk menentukan limit dari masing-masing fungsi $f\ (x)$ berikut pada saat $x$ mendekati 1.

***Solusi:***



a. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ (b) $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (c) $h(x)=\dfrac{-1}{x-1}$ (d) $k(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

a. Limit fungsi tidak ada karena $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ dan $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=\infty$
b. Limit fungsi tidak ada karena $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$
c. Limit fungsi tidak ada karena $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-1}{x-1}=\infty$ dan $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-1}{x-1}=-\infty$
d. Limit fungsi tidak ada karena $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$

***Catatan:***

Apabila grafik fungsi pada gambar 12 di atas diperpanjang tanpa batas ke arah positif maupun negatif, maka grafik fungsi di atas, akan semakin mendekati garis vertikal $x=1$. Garis $x=1$ tersebut dinamakan **asimtot tegak** (*vertical asymptote*) dari grafik fungsi di atas.

Fungsi-fungsi yang diberikan pada contoh-contoh di atas merupakan fungsi rasional. Perhatikan bahwa asimtot tegak terjadi pada saat penyebut nol dan pembilang tak nol.

***Contoh: (Menentukan Asimtot Tegak)***

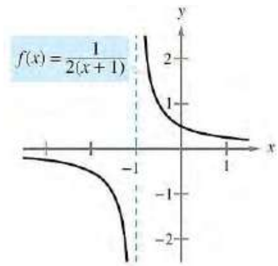
Tentukan semua asimtot tegak dari grafik fungsi berikut:

a. $f(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}$ b. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ c. $f(x)=\cot x$

***Solusi:***

Untuk menentukan asimtot dari fungsi di atas, maka dicari nilai $x$ yang mengakibatkan penyebut bernilai nol dan pembilang tak nol.

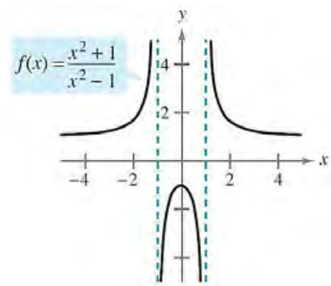
a. fungsi $f(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}$ memiliki asimtot tegak untuk semua $x$ sedemikian hingga $2(x+1)=0$. Dengan menggunakan operasi aljabar, diperoleh:




$$
\begin{aligned}
& 2(x+1)=0 \\
\Leftrightarrow\ & 2x+2 \ =0 \\
\Leftrightarrow\ & \quad 2x \ =-2 \\
\Leftrightarrow\ & \quad\ x \ =-1
\end{aligned}
$$

Jadi $f(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}$ memiliki asimtot tegak $x=-1$.

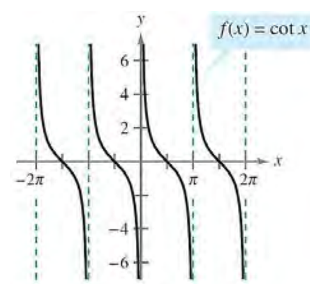
b. Grafik fungsi $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ memiliki asimtot tegak untuk semua $x$ sedemikian hingga $x^2-1=0$ (penyebut nol) dan $x^2+1\neq 0$ (pembilang tak nol).




- Penyebut nol akan diperoleh pada saat $x^2-1=(x+1)(x-1)=0$, yaitu $x=-1$ atau $x=1$.
- Pembilang tak nol akan diperoleh untuk semua $x\in R$.

Jadi fungsi $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ memiliki asimtot tegak $x=-1$ dan $x=1$.

c. fungsi $f(x)=\cot x$ dapat ditulis kembali dalam bentuk rasional:




$$f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

Oleh karena itu, grafik fungsi $f(x)=\cot x$ memiliki asimtot tegak untuk semua $x$ sedemikian hingga $\sin x=0$ dan $\cos x\neq 0$. Nilai $x$ yang memenuhi yaitu $x=n.\pi$, dimana $n$ bilangan bulat.

## *Sifat-sifat Limit Tak Hingga*

Sifat-sifat limit takhingga berikut dapat digunakan untuk menentukan limit suatu fungsi.

**Sifat-sifat Limit Takhingga**

Andaikan *c* dan *L* adalah bilangan real, dan misalkan *f* dan *g* adalah sebuah fungsi dengan limit didefinisikan sebagai:

$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = L$,

1. Jumlah atau selisih : $\lim_{x\to c}\left[ f(x) \pm g(x)\right] = \infty$
2. Hasil kali : $\lim_{x\to c}\left[ f(x).g(x)\right] = \infty$, $L > 0$

   $\lim_{x\to c}\left[ f(x).g(x)\right] = -\infty$, $L < 0$
3. Hasil bagi : $\lim_{x\to c}\left[ \dfrac{g(x)}{f(x)}\right] = 0$

***Contoh:***

Tentukan Limit fungsi berikut:

a. $\lim_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

b. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{\frac{1}{x^2}}\right)$

***Solusi:***

a. Karena $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, dan $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = \infty$ maka $\lim_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = \infty$ ➔ Sifat 1

b. Karena $\lim_{x\to 0} x+1 = 1$, dan $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = \infty$ maka $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{\frac{1}{x^2}}\right) = 0$ ➔ Sifat 3

## Turunan Fungsi

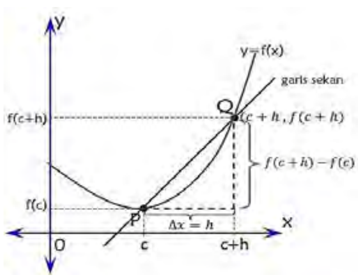

Di sebuah pabrik korek api kita dapat menyaksikan pembuatan kotak korek api dari kertas yang akan dijadikan kemasan korek api tersebut. Dalam pembuatan kotak korek api tersebut, perusahaan mengupayakan agar kotak tersebut dapat memuat korek api sebanyak mungkin ataupun menekan biaya pembuatan kotak korek api tersebut seminimum mungkin.

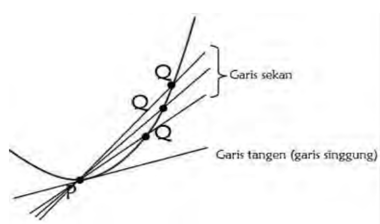
Pembuatan kotak korek di atas merupakan salah satu bentuk aplikasi turunan fungsi, yaitu maksimum dan minimum. Materi turunan ini merupakan kelanjutan dari materi limit fungsi yang telah dibahas sebelumnya. Oleh karena itu, konsep dan aturan dalam menentukan limit fungsi akan digunakan dalam pembahasan turunan fungsi ini.

### *Turunan Fungsi Aljabar*

**Gradien Garis Sekan dan Gradien Garis Singgung Kurva $y = f(x)$**

Misalkan P merupakan titik tetap pada (titik singgung) pada kurva suatu fungsi dan Q merupakan titik yang bergerak menuju titik P pada kurva yang sama. Garis yang melalui titik P dan Q disebut merupakan garis sekan (*secant line*).



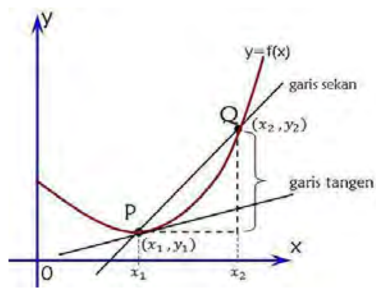

Perhatikan kurva pada grafik fungsi $y = f(x)$ di atas. Titik P mempunyai koordinat $(c, f(c))$ dan titik yang dekat dengan P, yaitu Q mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$. Sedangkan garis sekan yang melalui titik P dan Q mempunyai kemiringan (gradien $m_{\sec}$) yang ditentukan oleh:

$$m_{\sec} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Sementara itu gradien garis tangen pada kurva $y = f(x)$ di titik $c$ ditentukan oleh:

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} m_{\sec} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Pendefinisian gradien garis sekan dan gradien garis tangen pada kurva dengan persamaan $y = f(x)$ dapat pula ditentukan secara umum pada koordinat P $(x_1, y_1)$ dan Q $(x_2, y_2)$ sebagai berikut:




Perhatikan gambar di atas!

Gradien garis sekan (PQ) ditentukan oleh

$$m_{\sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Pada saat Q mendekati P, maka gradien garis sekan mendekati gradien garis tangen. Dengan menggunakan notasi limit, diperoleh:

$$m_{\tan} = \lim_{Q\to P} m_{\sec} = \lim_{x_2\to x_1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \lim_{x_2\to x_1}\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}\right)$$

Dari dua pendefinisian di atas, penulis mengambil bentuk pendefinisian pertama untuk selanjutnya digunakan pada buku ini.

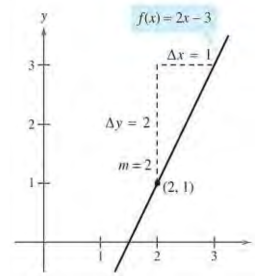
***Contoh: (menentukan gradien garis singgung grafik fungsi linear)***

Tentukan gradien garis singgung grafik fungsi $f(x) = 2x - 3$ pada titik $(2,1)$!

***Solusi:***

Untuk menentukan gradien garis singgung grafik f pada saat c=2, dapat digunakan definisi kemiringan garis tangen di atas.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[2(2+h)-3]-[2.(2)-3]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{4}+2h\cancel{-3}-\cancel{4}+\cancel{3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}2 = 2 \end{aligned}$$



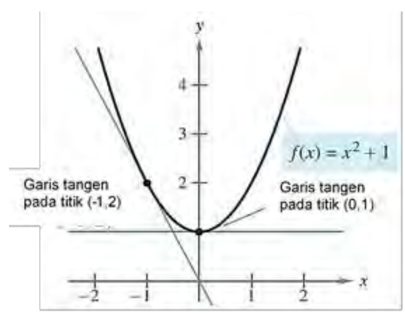

Jadi kemiringan garis singgung grafik fungsi f pada titik $(2,1)$ adalah $m = 2$ seperti yang ditunjukkan pada gambar di atas

***Contoh: (menentukan gradien garis singgung grafik fungsi nonlinear)***

Tentukan gradien garis singgung grafik fungsi $f(x) = x^2 + 1$ pada titik $(0,1)$ dan $(-1,2)$!

***Solusi:***

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(c+h)^2+1\right]-\left[c^2+1\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{c^2}+2ch+h^2+\cancel{1}-\cancel{c^2}-\cancel{1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2ch+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2c+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2c+h) \\ &= 2c \end{aligned}$$




Gradien garis singgung grafik fungsi f pada titik $(-1,2) = 2.(-1) = -2$, sedangkan gradien garis singgung grafik fungsi $f$ pada titik $(0,1) = 2.(0) = 0$

## *Definisi Turunan Fungsi*

Turunan suatu fungsi $f$ adalah suatu fungsi yang dinotasikan dengan $f'$ sedemikian sehingga nilai fungsi ini untuk setiap nilai $x$ dalam domain $f$ ditentukan oleh:

### *Definisi turunan fungsi*

Turunan suatu fungsi $f$ pada titik $x$ diberikan oleh:

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ atau $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ; $h = \Delta x$

Dengan asumsi limit ini ada.

Turunan dari fungsi $x$ adalah fungsi $x$ pula. Fungsi baru ini ($f'(x)$) menentukan kemiringan garis (*slope*) singgung kurva $f(x)$ pada titik $(x, f(x))$. Proses mencari turunan (derivatif) suatu fungsi disebut "**diferensiasi**" (*differentiation*). f'(x) disebut turunan (derivative) dari f terhadap x (f' dibaca "f aksen"). Sementara itu, bagian dari kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut kalkulus diferensial (*differential calculus*) (Varberg, Purcell, & Rigdon, 2007: 100).

### *Notasi turunan fungsi*

Selain notasi $f'(x)$, terdapat notasi lain yang digunakan untuk menyatakan turunan dari $y = f(x)$ terhadap $x$, yaitu:

- $\frac{dy}{dx}$ (dibaca "dy, dx" yaitu turunan $y$ terhadap $x$)
- $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$ (dibaca "d-$f(x)$, $dx$", yaitu turunan fungsi $f(x)$ terhadap $x$)
- y' (dibaca "y aksen" , yaitu turunan pertama dari $y$)
- $D_x\lfloor y \rfloor$ (dibaca " d-$x$, $y$" , yaitu turunan pertama dari $y$ terhadap $x$)

***Contoh: (menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan)***

Tentukanlah $f'(x)$ dengan menggunakan definisi turunan fungsi, dengan $f(x)=x^3+2x$ !

***Solusi:***

Berdasarkan definisi turunan fungsi, maka:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3+2(x+h)\right]-\left[x^3+2x\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3+\cancel{2x}+2h\right]-\cancel{x^3}-\cancel{2x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3+2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(3x^2+3xh+h^2+2\right)}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2+2\right)$$

$$=3x^2+3x(0)+(0)^2+2$$

$$=3x^2+2$$

***Contoh:***

Carilah nilai-nilai $x$ dari fungsi $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ yang mungkin sehingga $\dfrac{df(x)}{dx}=-\dfrac{1}{8}$.

***Solusi:***

Karena, $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$, maka $f(x+h)=\dfrac{2}{(x+h)+3}$ sehingga:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{2}{(x+h)+3}-\frac{2}{x+3}$$

$$=\frac{2(x+3)-2(x+h+3)}{(x+h+3)(x+3)}$$

$$=\frac{2x+6-2x-2h-6}{(x+h+3)(x+3)}$$

$$\therefore \quad f(x+h)-f(x) = \frac{-2h}{(x+h+3)(x+3)}$$

$$\therefore \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-2}{(x+h+3)(x+3)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2}{(x+h+3)(x+3)} \\
&= \frac{-2}{(x+3)^2} \\
&= -\frac{2}{(x+3)^2}
\end{aligned}$$

Karena $\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{8}$, maka:

$$-\frac{2}{(x+3)^2} = -\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)^2 = 4^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x+3 = \left\langle \begin{array}{l} +4 \\ \\ -4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad x+3 = \left\langle \begin{array}{l} 4-3=1 \\ \\ -4-3=-7 \end{array}\right.$$

Jadi nilai x yang mungkin adalah $x = 1$ atau $x = -7$

## Jenis dan Sifat Turunan Fungsi

### Jenis-jenis Turunan Fungsi

Turunan fungsi dapat digunakan untuk menentukan turunan beberapa jenis fungsi aljabar, antara lain:

a. Turunan fungsi Konstan
Misalkan $f(x) = k$ ($k =$ konstanta real). Turunan dari fungsi konstanta tersebut adalah:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Sehingga untuk $f(x) = k$ ($k =$ konstanta real), maka turunan $f(x)$ adalah $f'(x) = 0$

b. Turunan fungsi Identitas
Misalkan $f(\mathrm{x}) = x$. Turunan dari fungsi identitas tersebut adalah:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Sehingga untuk $f(x) = x$, maka turunan $f(x)$ adalah $f'(x) = 1$

c. Turunan fungsi pangkat

Misalkan diketahui fungsi pangkat $f(x) = ax^n$, $a$ konstanta real yang bukan nol dan $n$ bilangan bulat positif. Turunan fungsi pangkat tersebut adalah:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Bentuk $(x+h)^n$ dijabarkan dengan menggunakan Binom newton, sehingga diperoleh $(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n$

.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^n}+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+...+nxh^{n-1}+h^n-\cancel{x^n}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+...+nxh^{n-1}+h^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+...+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right)}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+...+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}nx^{n-1}+\lim_{h\to 0}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+...+\lim_{h\to 0}nxh^{n-2}+\lim_{h\to 0}h^{n-1}$$

$$=nx^{n-1}+0+...+0+0$$

$$=nx^{n-1}$$

Jadi, untuk $f(x)=x^n$, maka turunan $f(x)$ adalah $f'(x)=nx^{n-1}$

**Sifat-sifat (aturan) turunan Fungsi**

Turunan suatu fungsi dapat ditentukan beberapa sifat (aturan) sebagai berikut:

a. Hasil kali konstanta dengan fungsi

Misalkan $f(x)=k.u(x)$, dengan $k$ adalah konstanta real dan $u(x)$ adalah fungsi dari $x$ yang mempunyai turunan $u'(x)$. Fungsi $f(x)=k.u(x)$ adalah hasil kali konstanta $k$ dengan fungsi $u(x)$, yang memiliki turunan sebagai berikut:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k.u(x+h)-k.u(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}k\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$=k\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$=k.u'(x)$$

Sehingga untuk $f(x)=k.u(x)$, maka turunan $f(x)$ adalah $f'(x)=k.u'(x)$

b. Turunan jumlah dan selisih fungsi-fungsi (aturan jumlah dan selisih)

Misalkan $u(x)$ dan $v(x)$, masing-masing mempunyai turunan fungsi $u'(x)$ dan $v'(x)$ . andaikan $f(x)$ adalah jumlah fungsi $u(x)$ dan $v(x)$. Maka turunan fungsi $f(x) = u(x) + v(x)$, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[u(x+h) + v(x+h)\right] - \left[u(x) + v(x)\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= u'(x) + v'(x)
\end{aligned}$$

Jadi, untuk $f(x) = u(x) + v(x)$, maka turunan $f(x)$ adalah

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Dengan menggunakan cara yang sama, turunan selisih fungsi $u(x)$ dan $v(x)$ selisih turunan fungsi-fungsi tersebut.

Jadi, untuk $f(x) = u(x) \pm v(x)$, maka turunan $f(x)$ adalah

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

c. Turunan Hasil kali fungsi (aturan perkalian)

Misalkan $u(x)$ dan $v(x)$, masing-masing mempunyai turunan fungsi $u'(x)$ dan $v'(x)$ . andaikan $f(x)$ adalah hasil kali fungsi $u(x)$ dan $v(x)$. Maka turunan fungsi $f(x) = u(x) \times v(x)$, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[u(x+h).v(x+h)\right] - \left[u(x).v(x)\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x+h).v(x) + u(x+h).v(x) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h\to 0} v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
&= u(x).v'(x) + v(x).u'(x) \\
&= u'(x).v(x) + u(x).v'(x)
\end{aligned}$$

Jadi, untuk $f(x) = u(x) \times v(x)$, maka turunan $f(x)$ adalah

$$f'(x) = u'(x).\, v(x) + u(x).\, v'(x).$$

d. Turunan Hasil bagi fungsi (aturan pembagian)

Jika $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, maka $f'(x)=\dfrac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{\{v(x)\}^2}$

## *Turunan Fungsi Trigonometri*

Turunan fungsi trigonometri dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Misalkan $f(x) = \sin x$, maka turunan fungsi $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x)$, yaitu

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x.\cos h+\sin h.\cos x-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin x+\sin x.\cos h+\sin h.\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin x+\sin x.\cos h}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\sin h.\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(-\sin x)\left[\frac{(1-\cos h)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}(\cos x)\left[\frac{\sin h}{h}\right]\\
&= -\sin x.\left[\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h}\right]+\cos x\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin h}{h}\right]\\
&= -\sin x.(0)+\cos x\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin h}{h}\right]\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Jadi, untuk $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = cosx$

Dengan menggunakan cara yang sama, diperoleh turunan fungsi $f(x) = \cos x$ yaitu $f'(x) = -\sin x$. Sementara itu, dengan mengaplikasikan aturan perkalian dan pembagian turunan fungsi, serta dengan menggunakan identitas trigonometri, dapat diperoleh turunan dari fungsi-fungsi berikut:

- Jika $f(x) = \tan x$ maka $f'(x) = sec^2x$
- Jika $f(x) = \cot\ x$ maka $f'(x) = -cosec^2x$
- Jika $f(x) = \sec x$ maka $f'(x) = \sec x \tan x$
- Jika $f(x) = \operatorname{cosec} x$ maka $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

## *Turunan Fungsi Komposisi (Aturan Rantai)*

Jika $y = f \circ g$ sedemikian hingga $y = f(g(x))$ dengan $f$ dan $g$ adalah fungsi-fungsi yang mempunyai turunan, maka $y$ juga mempunyai turunan sehingga

$$y' = f'\big(g(x)\big).\, g'(x)$$

yang dapat diuraikan sebagai berikut:

Misal $z = g(x)$, maka $g'(x) = \frac{dz}{dx}$ dan $f'.\, g(x) = f'(z) = \frac{dy}{dz}$

Sehingga $y' = f'.\,(g(x)).\, g'(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$$ (Larson, Hostetler, & Edward, 2008:232)

Jika $y = f(u)$ adalah fungsi yang diferensiabel terhadap $u$ dan $u = g(x)$ adalah fungsi yang diferensiabel terhadap $x$, maka $y = f(g(x))$ adalah fungsi yang diferensiabel terhadap *x* dan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ atau ekuivalen dengan $\frac{d}{dx}\big[f\big(g(x)\big)\big] = f'\big(g(x)\big).\, g'(x)$

Ketika mengaplikasikan aturan rantai, akan lebih mudah jika kita memikirkan bahwa komposisi fungsi $f o\ g$ memiliki dua bagian, yakni bagian dalam (*inner part*) dan bagian luar (*outer part*)

*outer part*

$$y = f(g(x)) = f(u)$$

*inner part*

Turunan dari $y = f(u)$ adalah turunan dari fungsi luar (*outer function*) dikali dengan turunan dari fungsi dalam (*inner function*)

$$y = f'(u).\, u'$$

***Contoh:***

Tentukan turunan pertama dari $y = (x^2 + 4x - 3)^4$

***Solusi :***

Misal: $z = x^2 + 4x - 3 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x + 4$

$y = z^4 \rightarrow \frac{dy}{dz} = 4\, z^3$

$$y' = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = 4\, z^3.\,(2x + 4\,) = 4(x^2 + 4x - 3\,)^3.\,(2x + 4\,)$$

## Persamaan Garis Singgung Kurva

Dalam pembahasan definisi turunan di atas, kita telah mengenal arti geometri dari turunan fungsi $f(x)$ di suatu titik, yaitu:

$$f'(x_1) = m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

dengan $m$ =gradien garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $(x_1, f(x_1))$.
Persamaan garis singgung pada kurva pada kurva $y = f(x)$ di titik $A(x_1, f(x_1))$ ditentukan oleh formula:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

dengan $f'(x_1)$ adalah gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ pada $x_1$

***Contoh:***

Tentukan persamaan garis singgung parabola $y = 2x^2 + 1$ yang melalui titik $(-1,3)$.

***Solusi:***

Dari persamaan parabola $y = 2x^2 + 1$ diperoleh

$f(-1) = 2\,(-1)^2 + 1 = 3$, dan

$y' = f'(x) = 4x$

Untuk $x = -1$, diperoleh gradien gari singgung kurva $f'(-1) = 4.(-1) = -4$.

Dengan demikian, persamaan garis singgung kurva yang melalui titik $(-1,3)$ dengan gradien $m = -4$ ditentukan oleh:

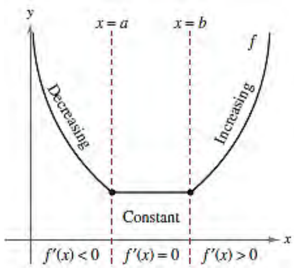
$$\begin{aligned} & y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \\ \Leftrightarrow\quad & y - 3 = (-4)\big(x - (-1)\big) \\ \Leftrightarrow\quad & y = -4x - 4 + 3 \\ \Leftrightarrow\quad & y = -4x - 1 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung pada parabola $y = 2x^2 + 1$ yang melalui titik $(-1,3)$ adalah $y = -4x - 1$.

# Aplikasi Turunan Fungsi

## *Fungsi Naik dan Fungsi Turun*

### Pengertian fungsi naik dan fungsi turun




Perhatikan grafik fungsi $y = f(x)$ yang dilukiskan pada gambar di samping. Secara visual, grafik fungsi $f(x)$ turun pada interval $(-\infty, a)$, kemudian konstan pada interval $(a, b)$, dan naik pada interval $(b, \infty)$.

Sebuah fungsi dikatakan naik (*increasing*) jika untuk $x$ makin besar (bergerak ke arah kanan pada sumbu *cartesius*) maka nilai fungsi ($f(x)$) semakin besar. Selanjutnya, fungsi dikatakan turun (*decreasing*) jika untuk $x$ makin besar (bergerak ke arah kanan pada sumbu *cartesius*) maka nilai fungsi ($f(x)$) semakin kecil. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

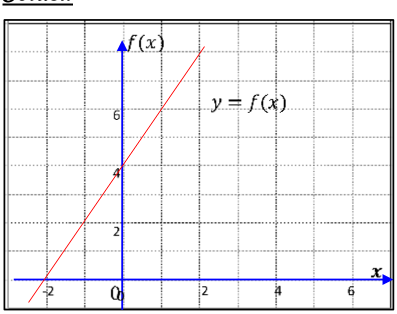
- Kondisi fungsi naik: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Kondisi fungsi turun: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

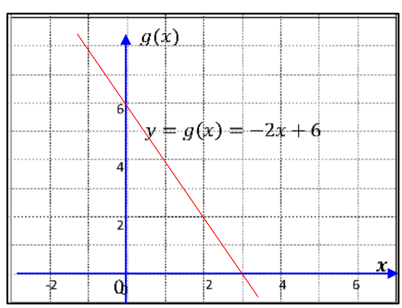
(Larson, Hostetler, & Edward, 2008: 170)

***Contoh:***

Diketahui $f(x) = 2x + 4$, dan $g(x) = -2x + 6$. Gambarkan grafik fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ pada bidang *cartesius*, kemudian tunjukkan manakah yang termasuk fungsi naik dan mana fungsi turun.

***Solusi:***




Berdasarkan grafik fungsinya, fungsi $f(x) = 2x + 4$ merupakan fungsi naik, sedangkan $g(x) = -2x + 6$ merupakan fungsi turun.

a) Untuk menunjukkan fungsi $f(x) = 2x + 4$ adalah fungsi naik, cukup ditunjukkan bahwa untuk sembarang bilangan real $a$ dan $b$ dengan $a < b$ atau $(a - b) < 0$, maka $f(a) < f(b)$, atau $f(a) - f(b) < 0$.
   - $f(a) = 2a + 4$, dan
   - $f(b) = 2b + 4$, sehingga

     $f(a) - f(b) = 2a + 4 - 2b - 4 = 2(a - b)$

Karena $(a - b) < 0$, maka $f(a) - f(b) = 2(a - b) < 0$ atau $f(a) < f(b)$. Dengan demikian, fungsi $f(x) = 2x + 4$ merupakan fungsi naik.

b) Untuk menunjukkan fungsi $g(x) = -2x + 6$ adalah fungsi turun, cukup ditunjukkan bahwa untuk sembarang bilangan real $a$ dan $b$ dengan $a < b$ atau $(a - b) < 0$, maka $g(a) > g(b)$, atau $g(a) - g(b) > 0$.
   - $g(a) = -2a + 6, dan$
   - $g(b) = -2b + 6$, sehingga

     $g(a) - g(b) = -2a + 6 + 2b - 6 = -2(a - b)$

Karena $(a - b) < 0$, maka $g(a) - g(b) = -2(a - b) > 0$ atau $g(a) > g(b)$. Dengan demikian, fungsi $g(x) = -2x + 6$ merupakan fungsi turun.

### *Interval Fungsi Naik dan Fungsi Turun*

Karakteristik naik dan turunnya suatu fungsi dapat diperiksa dengan menggunakan turunan pertama. Misalkan $f$ terdefinisi pada interval $[a, b]$,

a) Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x$ pada interval $(a, b)$, maka $f(x)$ naik pada $[a, b]$
b) Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x$ pada interval $(a, b)$, maka $f(x)$ turun pada $[a, b]$
c) Jika $f'(x) = 0$ untuk setiap $x$ pada interval $(a, b)$, maka $f(x)$ konstan (stasioner) pada $[a, b]$.

(Larson, Hostetler, & Edward, 2008: 170)

Dalam penyelesaian masalah yang berkaitan dengan fungsi naik, fungsi turun dan fungsi stasioner, seringkali dijumpai kasus-kasus berikut:

a) $f'(x) > 0$ untuk $x$ pada interval $I$: $f(x)$ selalu naik pada interval $I$,
b) $f'(x) < 0$ untuk $x$ pada interval $I$: $f(x)$ selalu turun pada interval $I$,
c) $f'(x) \geq 0$ untuk $x$ pada interval $I$: $f(x)$ tidak pernah turun pada interval $I$,
d) $f'(x) \leq 0$ untuk $x$ pada interval $I$: $f(x)$ tidak pernah naik pada interval $I$,
e) $f'(x) = 0$ untuk $x$ pada interval $I$: $f(x)$ stasioner pada interval $I$.

(Wirodikromo, 2007)

*Contoh:*

Sebuah kurva parabola dinyatakan dengan rumus $y = f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Tentukan interval-interval $x$ dimana $f(x)$ merupakan

a. Fungsi naik
b. Fungsi turun
c. Fungsi stasioner

*Solusi:*

dari $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, diperoleh $f'(x) = -2x + 2$.

a. $f(x)$ naik, jika $f'(x) > 0$,

$\Leftrightarrow -2x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow \quad -2x > -2$

$\Leftrightarrow \quad x < 1$

Jadi, $f(x)$ naik pada $x < 1$ atau $(-\infty, 1)$

b. $f(x)$ turun, jika $f'(x) < 0$,

$\Leftrightarrow -2x + 2 < 0$

$\Leftrightarrow \quad -2x < -2$

$\Leftrightarrow \quad x > 1$

Jadi, $f(x)$ turun pada $x > 1$ atau $(1, \infty)$.

c. $f(x)$ stasioner, jika $f'(x) = 0$,

$\Leftrightarrow -2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2x = -2$

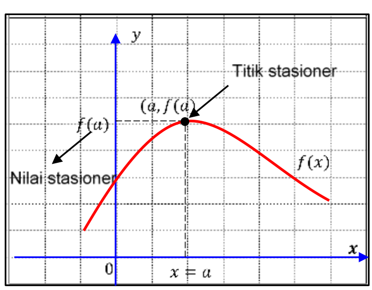
$\Leftrightarrow \quad x = 1$

Jadi, $f(x)$ stasioner pada saat $x = 1$

## *Titik Stasioner suatu Fungsi dan Jenis-jenis Ekstrim*

### Pengertian nilai stasioner dan titik stasioner

Jika $f'(a) = 0$, maka $f(a)$ adalah nilai stasioner dari $f(x)$ di $x = a$.




Pengertian di atas, mengisyaratkan bahwa nilai $x$ yang mengakibatkan $f(x)$ stasioner dapat dicari melalui hubungan $f'(x) = 0$. Titik $(a, f(a)$ dengan

$f'(a) = 0$, terletak pada grafik fungsi $y = f(x)$ disebut titik stasioner seperti terlihat pada gambar di atas. Titik stasioner termasuk dalam kelompok titik kritis, yang merupakan calon titik ekstrim.

***Contoh:***

Tentukan nilai-nilai stasioner dan koordinat titik stasioner untuk fungsi $y = f(x) = x^2 - 4$

***Solusi:***

Nilai $x$ yang menyebabkan $y = f(x)$ stasioner ditentukan oleh hubungan $f'(x) = 0$. Dari $f(x) = x^2 - 4$ diperoleh $f'(x) = 2x$.

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Untuk $x = 0$, diperoleh $f(0) = (0)^2 - 4 = -4$

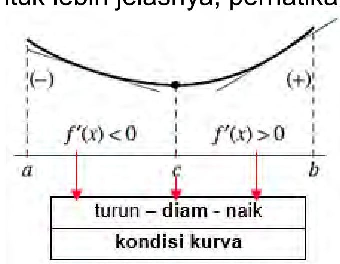
Jadi, fungsi $f(x) = x^2 - 4$ memiliki nilai stasioner$= -4$ dan koordinat titik stasioner $(0, -4)$.

**Jenis-Jenis Ekstrim Fungsi**

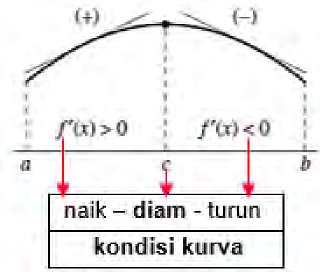
***Uji turunan pertama***

Andaikan c adalah titik kritis dari fungsi f yang terdiferensialkan pada interval $(a, b)$ yang memuat c.

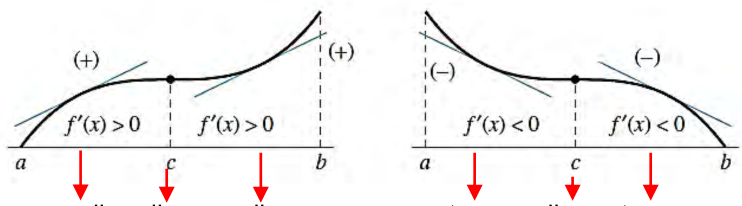
- Jika $f'(x)$ berganti tanda dari positif menjadi negatif pada saat $x = c$, maka $f$ memiliki nilai balik maksimum $f(c)$ dan titik $(c, f(c))$ adalah titik balik maksimum. Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut:




- Jika $f'(x)$ berganti tanda dari negatif menjadi positif pada saat $x = c$, maka $f$ memiliki nilai balik minimum $f(c)$ dan titik $(c, f(c))$ adalah titik balik maksimum. Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut:




- Jika $f'(x)$ tidak berganti tanda pada saat melalui $x = c$, maka $f$ memiliki titik belok horizontal $f(c)$ dan titik $(c, f(c))$ adalah bukan titik balik maksimum maupun minimum. Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut:




naik – diam - naik | turun – diam - turun
kondisi kurva | kondisi kurva

***Contoh:***

Tentukan nilai-nilai stasioner dari fungsi $f(x) = x(x-3)^2$, kemudian tentukan nilai balik maksimum dan nilai balik minimum dari fungsi tersebut.

***Solusi:***

$$f(x) = x(x-3)^2 = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

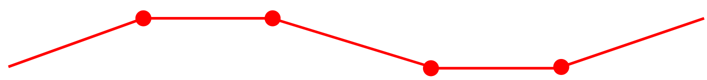
Nilai stasioner akan diperoleh jika $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad & 3x^2 - 12x + 9 && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3(x^2 - 4x + 3) && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + 3 && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-3)(x-1) && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 3 \text{ atau } x = 1 && \end{aligned}$$

$f(3) = 3(3-3)^2 = 0$ dan $f(1) = 1(1-3)^2 = 4$.

Jadi $f(x)$ memiliki nilai stasioner $f(3) = 0$ dan $f(1) = 4$, Sementara itu, titik ekstrimnya adalah (3,0) dan (1,4).

*Uji turunan pertama untuk mengetahui nilai balik maksimum dan minimum:*

| Nilai $x$ | $x < 1$ | $x = 1$ | $1 < x < 3$ | $x = 3$ | $x > 3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Nilai uji | 0 | titik stasioner | 2 | titik stasioner | 4 |
| Kondisi $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| Sketsa kurva |  | | | | |
| Kondisi | Naik | Diam | Turun | Diam | Naik |

Berdasarkan uji turunan pertama di atas, dapat disimpulkan bahwa $f(x)$ memiliki nilai maksimum pada saat $x = 1$, yaitu $f(1) = 4$, dan memiliki nilai minimum pada saat $x = 3$, yaitu $f(3) = 0$.

***Uji turunan kedua***

Uji turunan kedua sangat diperlukan saat penentuan titik belok kurva suatu fungsi. Uji turunan kedua pada penentuan jenis ekstrim (maksimum dan minimum) berdasarkan pengamatan terhadap nilai $f''(x)$ disekitar titik $= c$ , dimana $x = c$ adalah titik kritis dari $f$ ($f'(c) = 0$). Untuk lebih jelasnya perhatikan uraian berikut.

Andaikan c adalah titik kritis dan $f(c)$ adalah nilai stasioner dari fungsi $f$ yang terdiferensialkan pada interval $(a, b)$ yang memuat c.

- Jika $f''(c) < 0$ maka $f(c)$ adalah nilai balik maksimum dari $f$, sedangkan titik$(c, f(c))$ merupakan titik balik maksimum kurva.
- Jika $f''(c) > 0$ maka $f(c)$ adalah nilai balik minimum dari $f$, sedangkan titik$(c, f(c))$ merupakan titik balik minimum kurva.
- Jika $f''(c) = 0$ maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim, sedangkan titik$(c, f(c))$ merupakan titik belok kurva.

***Contoh:***

Tentukan nilai-nilai ekstrim beserta jenis ekstrim dari fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ dengan menggunakan uji turunan kedua.

***Solusi:***

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x)=x^3-x$$

Nilai stasioner akan diperoleh jika $f'(x)=0$

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \Leftrightarrow &\quad x^3-x=0 \\ \Leftrightarrow &\quad x\left(x^2-1\right)=0 \\ \Leftrightarrow &\quad x\left(x+1\right)\left(x-1\right)=0 \\ \Leftrightarrow &\quad x=0\ ,\ x=-1,\ atau\ x=1 \end{aligned}$$

$f'(x)=x^3-x$, maka $f''(x)=3x^2-1$.

*Uji turunan kedua*

| Nilai kritis $x$ | $x=-1$ | $x=0$ | $x=1$ |
|---|---|---|---|
| Nilai $f(x)$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ |
| Nilai $f''(x)$ | 2 | -1 | 2 |
| Kondisi $f''(x)$ | + | - | + |
| Jenis ekstrim | Minimum | Maksimum | Minimum |

Berdasarkan uji turunan kedua di atas, dapat disimpulkan bahwa

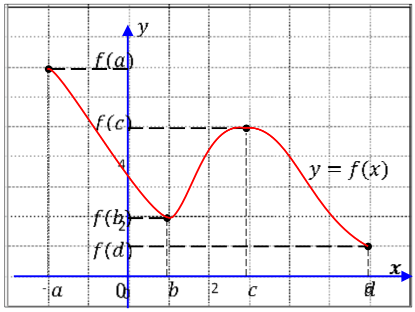
- $f(x)$ memiliki nilai maksimum pada saat $x=0$, yaitu $f(0)=0$, dengan titik maksimum (0,0),
- $f(x)$ memiliki dua nilai minimum yakni pada saat $x=-1$, yaitu $f(-1)=-\frac{1}{4}$; dan pada saat $x=1$ yaitu $f(1)=-\frac{1}{4}$. Dengan titik-titik minimum $(-1,-\frac{1}{4})$, dan $(1,-\frac{1}{4})$.

### *Nilai Maksimum dan Minimum Suatu Fungsi dalam Interval Tertutup*

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval tertutup $I$ yang memuat titik $a$.

- Jika $f(a)\geq f(x)$ untuk semua $x$ dalam interval tertutup $I$, maka $f(a)$ disebut sebagai nilai maksimum fungsi $f(x)$ pada interval $I$.
- Jika $f(a)\leq f(x)$ untuk semua $x$ dalam interval tertutup $I$, maka $f(a)$ disebut sebagai nilai minimum fungsi $f(x)$ pada interval $I$.

Untuk lebih memahami pengertian nilai maksimum dan minimum di atas, perhatikan gambar berikut.




Berdasarkan gambar di atas, diperoleh informasi bahwa

- ✓ $f(a) \geq f(x)$ untuk semua $x$ dalam interval tertutup $[a, d]$, sehingga nilai maksimum fungsi $f(x)$ pada interval $[a, d]$ adalah $f(a)$.
- ✓ $f(d) \leq f(x)$ untuk semua $x$ dalam interval tertutup $[a, d]$, sehingga nilai minimum fungsi $f(x)$ pada interval $[a, d]$ adalah $f(d)$.
- ✓ $f(x)$ memiliki nilai balik minimum yaitu $f(b)$.
- ✓ $f(x)$ memiliki nilai balik maksimum yaitu $f(c)$.

Berdasarkan uraian serta contoh di atas, dapat diambil beberapa kesimpulan:

a) Nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi dalam suatu interval tertutup belum tentu sama dengan nilai balik maksimum atau nilai balik minimum fungsi dalam interval tersebut.

b) Nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi dalam suatu interval tertutup dapat diperoleh dari dua kemungkinan, yaitu:
   1) Nilai balik maksimum atau minimum fungsi, atau
   2) Nilai-nilai fungsi pada ujung interval.

***Contoh:***

Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = x^2 - 4x$ dalam interval-interval tertutup berikut ini.

a. $-2 \leq x \leq 0$ atau $[-2,0]$

b. $1 \leq x \leq 4$ atau $[1,4]$

***Solusi:***

Berdasarkan $(x) = x^2 - 4x$ , diperoleh $f'(x) = 2x - 4$, dan $f''(x) = 2$

Nilai stasioner $f(x)$ akan diperoleh jika $f'(x) = 0$, yaitu:

$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Nilai stasionernya adalah $f(2) = 2^2 - 4(2) = -4$.

Dengan menggunakan uji turunan kedua, diperoleh $f''(2) = 2$ (positif), sehingga

$f(2) = -4$ merupakan nilai balik minimum $f(x)$.

a. Nilai maksimum dan minimum dalam interval $-2 \le x \le 0$ dapat ditentukan sebagai berikut:

- Langkah 1

  Dalam interval $-2 \le x \le 0$ tidak ada nilai balik minimum (nilai balik minimum terjadi pada $x = 2$)
- Langkah 2

  Nilai-nilai fungsi $f(x) = x^2 - 4x$ pada titik-titik ujung interval ($x = -2$ dan $x = 0$), yaitu:
  $f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) = 12$, dan
  $f(0) = (0)^2 - 4(0) = 0$
- Langkah 3

  Berdasarkan langkah 1 dan 2, dapat ditetapkan:
  - Nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x) = x^2 - 4x$ terjadi pada titik-titik ujung interval ($x = -2$ dan $x = 0$).

Dapat disimpulkan bahwa pada interval $[-2,0]$, nilai maksimum $f(x)$ adalah 12 , dan nilai minimum $f(x)$ adalah $0$. Atau dapat dikatakan bahwa:

untuk $-2 \le x \le 0$, nilai fungsi berada pada interval $0 \le f(x) \le 12$.

b. Nilai maksimum dan minimum dalam interval 1$\le x \le 4$ dapat ditentukan sebagai berikut:

- Langkah 1

  Dalam interval $1 \le x \le 4$ terdapat nilai balik minimum, yaitu $f(2) = -4$.
- Langkah 2

  Nilai-nilai fungsi $f(x) = x^2 - 4x$ pada titik-titik ujung interval ($x = 1$ dan $x = 4$), yaitu:
  $f(1) = (1)^2 - 4(1) = -3$, dan
  $f(4) = (4)^2 - 4(4) = 0$
- Langkah 3

  Berdasarkan langkah 1 dan 2, dapat ditetapkan:

- Nilai maksimum fungsi $f(x) = x^2 - 4x$ terjadi pada titik-titik ujung sebelah kanan ($x = 4$), dan
- Nilai minimum fungsi $f(x) = x^2 - 4x$ terjadi pada titik-balik minimum ($x = 2$).

Dapat disimpulkan pada interval $[1,4]$, nilai maksimum $f(x)$ adalah 0, dan nilai minimum $f(x)$ adalah $-4$. Atau dapat dikatakan bahwa:

untuk $1 \leq x \leq 4$, nilai fungsi berada pada interval $-4 \leq f(x) \leq 0$.

## *Menggambar Grafik Fungsi Aljabar*

Pembahasan sebelumnya telah dibahas tentang fungsi naik dan fungsi turun, titik stasioner, nilai balik minimum dan maksimum, dan titik belok kurva. Informasi yang diperoleh pada pembahasan tersebut akan membantu dalam menggambar grafik suatu fungsi. Untuk memudahkan dalam menggambar grafik fungsi aljabar digunakan informasi kecekungan dan titik belok grafik fungsi dengan menggunakan uji turunan kedua.

### Kecekungan grafik fungsi

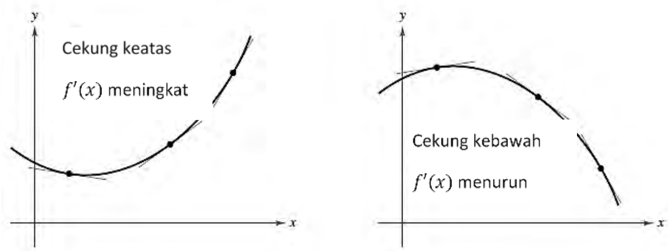
Kecekungan grafik suatu fungsi menunjukkan perubahan kemiringan grafik fungsi ($f'(x)$).

- Jika $f'(x)$ naik (semakin besar) pada suatu interval $I$, maka grafik fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada interval $I$.
- Jika $f'(x)$ turun (semakin kecil) pada suatu interval $I$, maka grafik fungsi $f(x)$ cekung kebawah pada interval $I$.

Untuk menentukan kecekungan grafik fungsi, digunakan uji turunan kedua. Misalkan $f(x)$ memiliki turunan kedua ($f''(x)$) pada interval terbuka $I$,

a) Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap $x$ pada interval $I$, maka grafik fungsi $f$ **cekung ke atas** pada interval $I$.
b) Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap $x$ pada interval $I$, maka grafik fungsi $f$ **cekung kebawah** pada interval $I$.

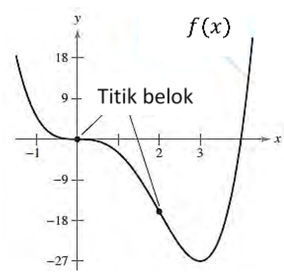
Untuk lebih memahami pengertian di atas, perhatikan gambar berikut.




(Larson, Hostetler, & Edward, 2008: 180)

**Titik belok (inflection) grafik fungsi**

Untuk menentukan titik belok suatu grafik fungsi, perhatikan uraian berikut. Jika $(c, f(c))$ merupakan titik belok grafik fungsi $f$, maka $f''(c) = 0$ atau $f''(c)$ tidak ada. untuk lebih memahami pengertian di atas, perhatikan gambar berikut.




(Larson, Hostetler, & Edward, 2008: 183)

**a. Langkah-langkah menggambar grafik fungsi aljabar**

Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam menggambar grafik fungsi aljabar yang dapat didiferensialkan adalah:

1) Tentukan titik potong grafik fungsi dengan sumbu $x$ dan sumbu $y$ (jika mudah dilakukan)
2) Tentukan titik-titik stasioner beserta jenisnya (maksimum, minimum, kecekungan, dan titik belok)
3) Tentukan nilai $y = f(x)$ untuk nilai $x$ yang besar positif dan untuk nilai $x$ yang besar negatif.

***Contoh:***

Gambarkan grafik fungsi $f(x) = x^4 - 4x^3$ dengan daerah asal $D_f = \{x | x \in R\}$.

**Solusi:**

Berdasarkan $f(x) = x^4 - 4x^3$ , diperoleh $'(x) = 4x^3 - 12x^2$ , dan $f''(x) = 12x^2 - 24x$.

1) *Titik potong dengan sumbu $x$ dan sumbu $y$*

- Jika $x = 0$, maka $y = f(0) = 0$ ➔ titik potong dengan sumbu y yaitu $(0,0)$.
- Jika $y = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 = 0$
  $\Leftrightarrow x^3(x-4) = 0$
  $\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 4$ ➔ titik potong dengan sumbu x yaitu $(0,0)$ dan $(4,0)$

2) *Titik stasioner dan jenisnya*

- Nilai stasioner terjadi pada saat $f'(x) = 0$, yaitu:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ atau \ x = 3$$
$$f(0) = (0)^4 - 4(0)^3 = 0 \ dan \ f(3) = (3)^4 - 4(3)^3 = 81 - 102 = -21$$
$$f''(0) = 12(0)^2 - 24(0) = 0 \ dan \ f''(3) = 12(3)^2 - 23(3) = 39$$

*Uji turunan ke dua*

| Nilai-nilai kritis $x$ | $x = 0$ | $x = 3$ |
|---|---|---|
| Nilai $f(x)$ | 0 | $-21$ |
| Nilai $f''(x)$ | 0 | 39 |
| Kondisi $f''(x)$ | 0 | + |
| Jenis ekstrim | - | Minimum |

Jadi $f(x)$ hanya memiliki titik balik minimum $(3, -21)$.

- Titik belok
  Nilai $f''(x)$ terdefinisi untuk setiap nilai $x \in R$, sehingga titik belok grafik fungsi $f(x)$ terjadi pada saat $f''(x) = 0$, yaitu:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x = 0$$
$$\Leftrightarrow 12x(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ atau \ x = 2$$
$$f(0) = (0)^4 - 4(0)^3 = 0 \ dan \ f(2) = (2)^4 - 4(2)^3 = -16$$

Jadi $f(x)$ memiliki titik belok $(0,0)$ dan $(2, -16)$.

- Kecekungan grafik fungsi

  fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada saat $f''(x) > 0$, yaitu:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x > 0$$
$$\Leftrightarrow 12x(x-2) > 0$$
$$\Leftrightarrow x < 0 \ atau \ x > 2$$

Jadi, grafik fungsi cekung ke atas pada interval $x < 0$ atau $> 2$ .
fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada saat $f''(x) < 0$, yaitu:

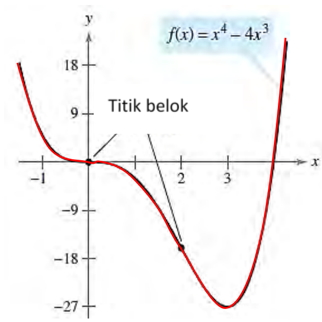
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x < 0$$
$$\Leftrightarrow 12x(x-2) < 0$$
$$\Leftrightarrow x > 0 \ dan \ x < 2$$

Jadi, grafik fungsi cekung ke bawah pada interval $0 < x < 2$.

3) Nilai $y = f(x)$ untuk nilai $x$ besar positif dan nilai $x$ besar negatif.

Pilih $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^3 = 16 + 32 = 48$
Pilih $x = 5 \Rightarrow f(5) = (5)^4 - 4(5)^3 = 625 - 500 = 125$

Sketsa Grafik fungsi $f(x) = x^4 - 4x^3$ adalah sebagai berikut:




## *Aplikasi Turunan dalam Pemecahan Masalah*

Turunan fungsi dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah sehari-hari, masalah disiplin ilmu lain, termasuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kalkulus itu sendiri. Langkah-langkah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah ekstrim fungsi adalah sebagai berikut.

a) Merumuskan model matematis dari masalah. Kegiatan yang dilakukan yaitu:
   - Mengubah informasi dalam masalah menjadi bentuk variabel (mengidentifikasi dan memberi nama untuk variabel-variabel)

- Menentukan hubungan antar variabel atau komponen dalam masalah.

b) Menerapkan konsep-konsep dan prinsip kalkulus pada model matematis yang telah kita rumuskan untuk memperoleh kesimpulan matematis

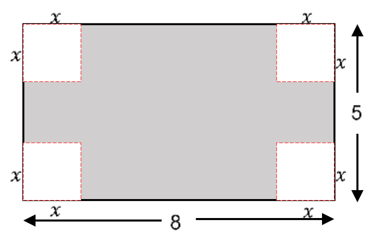
c) Menafsirkan kesimpulan matematis yang diperoleh sesuai dengan konteks masalah yang diberikan.

d) Menguji kebenaran hasil yang diperoleh.

(Stewart, 2009)

***Contoh:***

Sebuah kotak tanpa tutup akan dibuat dari kertas berbentuk persegi panjang berukuran 8 cm x 5 cm dengan memotong suatu persegi sama besar bersisi $x$ pada setiap sudutnya kemudian melipat sisi-sisinya seperti tampak pada gambar. Berapakah ukuran kotak yang harus dibuat agar volume kotak yang dihasilkan maksimum.




***Solusi:***

a) Membuat model matematis dari masalah:
Diketahui:
<u>Ukuran kertas</u>
- Panjang kardus = 8 cm
- Lebar kardus = 5 cm

Misalkan ukuran kotak yang diinginkan
- Panjang kotak $= p = 8 - 2x$
- lebar kotak $= l = 5 - 2x$
- tinggi kotak $= t = x$, dengan $0 < x < 5$
- Volume kotak $= V = p.l.t$

Berdasarkan informasi di atas, diperoleh model matematika sebagai berikut

$$V = p.l.t = (8 - 2x)(5 - 2x)(x)$$

b) Berdasarkan model matematis di atas, terlihat bahwa volume kotak bergantung pada $x$, atau dapat dituliskan $V(x) = (8 - 2x)(5 - 2x)(x)$

Oleh karena itu untuk memperoleh volume maksimum, akan digunakan turunan fungsi.

$V(x) = (8 - 2x)(5 - 2x)(x)$

$\quad = (40 - 16x - 10x + 4x^2).x$

$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ dengan $0 < x < 6$

$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$

Nilai stasioner $V(x)$ akan diperoleh jika $V'(x) = 0$, yaitu:

$12x^2 - 52x + 40 = 0 \Leftrightarrow 4(3x^2 - 13x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow 4(3x - 10)(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$ atau $x = 1$

Uji turunan kedua untuk menentukan nilai maksimum

$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 \Rightarrow V''(x) = 24x - 52$

- $V''\left(\frac{10}{3}\right) = 24\left(\frac{10}{3}\right) - 52 = 80 - 52 = 28$ ($V''(x)$ positif ➔nilai minimum)
- $V''(1) = 24(1) - 52 = 24 - 52 = -28$ ($V''(x)$ negatif ➔nilai maksimum)

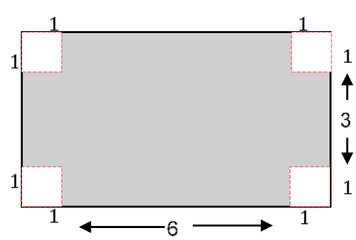
Jadi $V(x)$ maksimum untuk $x = 1$, yaitu $V(1) = 28$.

c) Karena $V(x)$ maskimum untuk $x = 1$, maka ukuran kotak yang harus dibuat adalah

Panjang ($p$)= $8 - 1 = 6\ cm$,

Lebar ($l$)= $5 - 1 = 4\ cm$, dan

Tinggi ($t$)= $1\ cm$




Dengan demikian volume kotak yang diperoleh adalah $V = 6 \times 4 \times 1 = 24\ cm^3$

## *Perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi (Dalil L'Hopital)*

Pada pembahasan limit fungsi, telah diuraikan beberapa metode/strategi untuk menyelesaikan bentuk tak tentu limit fungsi ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty + \infty, \text{dan } 0^0$). Strategi yang digunakan yaitu, faktorisasi, rasionalisasi akar. Selain *teknik* tersebut, turunan fungsi juga dapat digunakan untuk menyelesaikan bentuk tak tentu limit fungsi. Perhatikan uraian berikut:

**Dalil L'Hopital**

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang diferensiabel pada setiap titik dalam interval terbuka $I$.

Jika $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mempunyai bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$, maka:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Jika $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{0}{0}$, lakukan kembali penurunan, yaitu:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

Sampai tak dijumpai bentuk $\frac{0}{0}$.

(Sukino, 2007: 254)

***Contoh:***

1. Tentukan $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$
2. Tentukan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$

**Solusi:**

1. Dengan melakukan substitusi langsung akan diperoleh bentuk tak tentu, yaitu $\frac{a^n - a^n}{a - a} = \frac{0}{0}$ ➔ Bentuk tak tentu.

   Dengan menggunakan dalil L'Hopital, diperoleh:

   $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{nx^{n-1} - 0}{1 - 0} = na^{n-1}$ (diturunkan 1 kali)

2. Dengan melakukan substitusi langsung akan diperoleh bentuk tak tentu, yaitu $\dfrac{\sqrt{0+1}-1}{\sqrt[3]{0+1}-1}=\dfrac{0}{0}$ ➔ Bentuk tak tentu.

   Dengan menggunakan dalil L'Hopital, diperoleh:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}-1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}-0}{\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}-0} \qquad \text{(diturunkan 1 kali)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(0+1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

## Integral Fungsi

Dalam matematika kita mengenal operasi yang saling berkebalikan (*invers*). Misalnya, operasi penjumlahan dengan pengurangan, perkalian dengan pembagian, perpangkatan dengan penarikan akar, dan operasi-operasi lainnya yang saling berkebalikan. Hal demikian juga berlaku dalam turunan fungsi. Jika pada pembahasan sebelumnya telah dibahas cara menentukan turunan fungsi, maka sekarang akan dibahas proses kebalikan dari turunan itu sendiri yang sering disebut anti turunan atau integral. Untuk membantu kalian memahami konsep integral, perhatikan ilustrasi berikut.

Suatu benda diamati bergerak pada suatu lintasan dengan fungsi posisi $s(t)=t^3$, dengan $t$ dalam satuan detik. Jika diminta untuk menentukan kecepatan benda pada setiap waktu, maka dengan menggunakan konsep turunan fungsi diperoleh bahwa kecepatan benda tersebut ditentukan oleh $v(t)=s'(t)=3t^2$. Pernyataan-pernyataan tersebut dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

(i). Turunan pertama dari $s(t)=t^3$ adalah $s'(t)=v(t)=3t^2$ , atau

(ii). $v(t)=3t^2$ merupakan turunan pertama dari $s(t)=t^3$

Bagaimana jika proses tersebut kita balik?

Jika diketahui bahwa kecepatan benda $v(t) = 3t^2$, maka untuk menentukan fungsi posisi benda tersebut pada setiap waktu sama halnya dengan menentukan fungsi yang memiliki turunan pertama $v(t) = 3t^2$. Berdasarkan pernyataan (i) dan (ii) dapat kita peroleh jawaban bahwa fungsi posisi benda pada setiap waktu ditentukan oleh fungsi $s(t) = t^3$, karena turunan pertama $s(t)$adalah $s'(t) = 3t^2$. Oleh karena itu $s(t)$ dikatakan sebagai suatu **anti turunan** dari $v(t)$.

***Definisi (Anti turunan)***

| |
|---|
| Fungsi $F$ dikatakan sebagai **suatu anti turunan** dari $f$ jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x$ dalam interval $I$. |

Untuk lebih memahami Definisi 1 perhatikan Contoh 1

***Contoh 1:***

Tentukan suatu anti turunan dari fungsi berikut.

1. $f(x) = 2x$
2. $g(x) = 4x^3$
3. $h(x) = 5x^4$

***Penyelesaian:***

Berdasarkan definisi anti turunan diperoleh gambaran bahwa menentukan suatu anti turunan fungsi-fungsi $f(x)$, $g(x)$, dan $h(x)$ berarti mencari suatu fungsi lain yang apabila diturunkan menghasilkan $f(x)$, $g(x)$, dan $h(x)$ itu sendiri.

1. Karena $F(x) = x^2$ memiliki turunan yaitu $F'(x) = 2x$, maka $F(x) = x^2$ merupakan suatu anti turunan dari $f(x) = 2x$
2. Karena $G(x) = x^4$ memiliki turunan yaitu $G'(x) = 4x^3$, maka $G(x) = x^4$ merupakan suatu anti turunan dari $g(x) = 4x^3$
3. Karena $H(x) = x^5$ memiliki turunan yaitu $H'(x) = 5x^4$, maka $H(x) = x^5$ merupakan suatu anti turunan dari $h(x) = 5x^4$

Pada Definisi antiturunan dinyatakan bahwa $F$ dikatakan sebagai suatu anti turunan, bukan sebagai anti turunan dari *f.* Mengapa demikian? Perhatikan contoh berikut.

a. $F_1(x) = x^3$ ➔ $F'(x) = f(x) = 3x^2$
b. $F_2(x) = x^3 + 7$ ➔ $F'(x) = f(x) = 3x^2$
c. $F_3(x) = x^3 - 5$ ➔ $F'(x) = f(x) = 3x^2$
d. $F_4(x) = x^3 + \frac{1}{2}$ ➔ $F'(x) = f(x) = 3x^2$

Berdasarkan empat contoh tersebut dapat disimpulkan bahwa anti turunan dari $f(x) = 3x^2$, tidak hanya satu fungsi tunggal. Berapapun bilangan *real* konstan yang ditambahkan pada fungsi $F(x)$, selalu memenuhi $F'(x) = f(x)$. Oleh karena itu $F(x) = x^3$ disebut sebagai salah satu atau suatu anti turunan dari $f(x) = 3x^2$. Sementara itu, anti turunan dari $f(x) = 3x^2$ merupakan **himpunan** semua fungsi yang didefinisikan sebagai $F(x) = x^3 + C$, dengan $C$ adalah konstanta *real.*

Himpunan dari antiturunan fungsi $f$ tersebut dinamakan **integral tak tentu** dari $f$ atau dapat dikatakan bahwa integral tak tentu dari $f(x) = 3x^2$ adalah $F(x) = x^3 + C$. Proses untuk menentukan anti turunan dari fungsi $f(x)$ adalah proses mengintegralkan (integrasi).

## *Notasi Integral*

Pada proses menentukan turunan (diferensiasi) suatu fungsi digunakan beberapa notasi, misalnya $F'(x)$ sebagai turunan pertama dari $F(x)$ terhadap $x$; atau $\frac{dy}{dx}$ sebagai turunan pertama dari $y$ terhadap $x$; dan sebagainya. Sementara itu, proses menentukan anti turunan (integrasi) menggunakan notasi "$\int$". Oleh karena itu, himpunan semua anti turunan dari fungsi $f$ ditulis sebagai berikut.

*integran* *variabel integrasi* *suatu anti turunan f* *konstanta integrasi*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

***Catatan:***

- Notasi di atas dibaca: "integral $f(x)$ terhadap $x$" yang berarti bahwa apabila fungsi $F(x)$ diturunkan terhadap variabel $x$, akan menghasilkan $f(x)$.
- Perlu diperhatikan bahwa penulisan notasi integral "$\int$" suatu fungsi harus dikuti dengan notasi "$dx$", "$dt$" atau notasi lainnya yang menunjukkan variabel integrasi.

***Contoh 2:***

Tentukan integral tak tentu fungsi-fungsi berikut.

1. $\int 2x\,dx$
2. $\int 4x^3\,dx$
3. $\int 5x^4\,dx$

***Penyelesaian:***

Berdasarkan penyelesaian pada Contoh 1, diperoleh:

1. $\int 2x\, dx = x^2 + C$
2. $\int 4x^3\, dx = x^4 + C$
3. $\int 5x^4\, dx = x^5 + C$

## *Sifat-sifat Integral Tak Tentu*

Perhatikan ilustrasi berikut.

*Pangkat variabel $x$ dikurangi 1*

Jika $f(x) = x^{\boldsymbol{n}}$, maka $f'(x) = \boldsymbol{n}x^{\boldsymbol{n}-1}$ $\longrightarrow$ *Proses diferensiasi*

*Pangkat terdahulu menjadi faktor pengali*

Karena integral merupakan invers dari turunan fungsi, maka, proses yang dilakukan adalah kebalikan dari aturan pada proses diferensiasi, yaitu (1) pangkat variabel ditambah 1, dan (2) pangkat terbaru menjadi faktor pembagi.

Secara matematis integral tak tentu fungsi pangkat (aturan pangkat) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\int x^{\boldsymbol{n}}, dx = \frac{x^{\boldsymbol{n+1}}}{n+1} + C, \text{dengan } n \neq -1$$

***Contoh 3:***

Tentukan integral tak tentu berikut.

1. $\int x^2\, dx$
2. $\int x^3\, dx$
3. $\int x^{-2}\, dx$

***Penyelesaian:***

Karena integran berupa fungsi pangkat, maka Integral tak tentu dari fungsi di atas dapat ditentukan dengan menggunakan aturan pangkat.

1. $$\int x^2\, dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{3}x^3 + C$$
2. $$\int x^3\, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C = \frac{1}{4}x^4 + C$$

3. $\displaystyle\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

## *Integral Tak Tentu Hasil Kali Fungsi dengan Konstanta*

Ingat kembali aturan hasil kali fungsi dengan konstanta pada turunan fungsi, bahwa: $\frac{d}{dx}[k.f(x)] = k\frac{d}{dx}[f(x)] = kf'(x)$, Sehingga diperoleh hubungan bahwa $k\,f(x)$ adalah suatu anti turunan dari $k\,f'(x)$. Oleh karena itu hubungan tersebut dapat ditulis kembali menjadi:

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x) + C$$

Perhatikan Contoh berikut.

***Contoh 4:***

Tentukan integral tak tentu berikut.

1. $\int 3\,dx$
2. $\int \frac{1}{2}x^3\,dx$
3. $\int 4\sqrt[3]{x}\,dx$

***Penyelesaian:***

Integran dari soal 1 s.d. 3 berupa hasil kali bilangan konstan dengan fungsi pangkat, sehingga

1. $\displaystyle\int 3\,dx = \int 3.x^0\,dx = 3\int x^0\,dx = 3\left[\frac{x^{0+1}}{0+1} + C\right] = 3[x+C] = 3x + 3C$
   $= 3x + C$

$3 \times C = C$ *karena 3 kali bilangan konstant menghasilkan bilangan konstan juga*

2. $\displaystyle\int \frac{1}{2}x^3 dx = \frac{1}{2}\int x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{3+1}}{3+1} + C\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} + C\right] = \frac{1}{8}x^4 + C$
3. $\displaystyle\int 4\sqrt[3]{x}\,dx = 4\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = 4\left[\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C\right] = 4\,\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 4C = 3x^{\frac{4}{3}} + 4C$
   $= 3x\sqrt[3]{x} + C$

### *Integral Jumlah dan Selisih Fungsi-Fungsi*

Ingat kembali turunan jumlah dan selisih fungsi-fungsi, bahwa:

$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$ atau $\frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)]$

Sehingga diperoleh hubungan bahwa $f(x) \pm g(x)$ adalah suatu anti turunan dari $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)]$. Oleh karena itu, hubungan tersebut dapat ditulis kembali menjadi:

$$\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x) \pm \int g(x) + C$$

Untuk lebih memahami integral jumlah dan selisih fungsi-fungsi, perhatikan Contoh Berikut.

***Contoh 5:***

Tentukan integral tak tentu berikut.

1. $\int (x+2)dx$

***Penyelesaian:***

Integran dari soal berupa jumlah dari dua dan tiga fungsi pangkat, sehingga integral tak tentu dari soal 1 s.d. 3 dapat ditentukan dengan menggunakan integrasi jumlah dan selisih fungsi-fungsi, yaitu:

$$\begin{aligned}
\int (x+2)\, dx &= \int x\, dx + \int 2\, dx \\
&= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1\right) + \int 2x^0\, dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 2\int x^0\, dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 2\left(\frac{x^{0+1}}{0+1} + C_2\right) \\
&= \frac{x^2}{2} + C_1 + 2\frac{x}{1} + 2C_2 \\
&= \frac{1}{2}x^2 + C_1 + 2x + 2C_2 \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2x + C_1 + 2C_2 \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2x + C
\end{aligned}$$

## *Integral Fungsi Trigonometri*

Integral tak tentu dari fungsi trigonometri dapat ditentukan dengan menggunakan aturan atau sifat-sifat turunan fungsi trigonometri. Karena integral merupakan proses kebalikan atau invers dari turunan, maka diperoleh hubungan sebagai berikut.

- $\frac{d}{dx}[sin\,x] = cos\,x$ ➔ $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
- $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$ ➔ $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
- $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ ➔ $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
- $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$ ➔ $\int -\csc^2 x\, dx = \cot x + C$
- $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$ ➔ $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
- $\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$ ➔ $\int -\csc x \cot x\, dx = \csc x + C$

Untuk lebih memahami turunan fungsi trigonometri, perhatikan Contoh 6 berikut.

***Contoh 6:***

Tentukan integral tak tentu berikut.

1. $\int (\cos x + \sin x) dx$
2. $\int \frac{2}{\cos^2 x}\, dx$

***Penyelesaian:***

1. Integran dari soal 1 berupa jumlah dua fungsi trigonometri, sehingga integral tak tentu dapat ditentukan dengan menggunakan integral jumlah fungsi trigonometri, yaitu:

$$\begin{aligned} \int (\cos x + \sin x) dx &= \int \cos x\, dx + \int \sin x\, dx \\ &= \sin x + C_1 - \cos x + C_2 \\ &= \sin x - cos\ x + C \end{aligned}$$

2. Integran dari soal 2 merupakan fungsi trigonometri. Namun, bentuk integran $\frac{2}{\cos^2 x}$ belum dapat ditentukan integral tak tentunya. Oleh karena

itu, bentuk $\frac{2}{\cos^2 x}$ terlebih dahulu dituliskan kembali ke dalam bentuk lainnya yang relevan dengan aturan integral fungsi trigonometri.

Ingat kembali bahwa $\frac{1}{\cos x} = \sec x$, sehingga:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\cos^2 x}\,dx &= 2\int \left(\frac{1}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}\right) dx \\ &= 2\int (\sec x \,.\, \sec x)\, dx \\ &= 2\int \sec^2 x\, dx = 2\tan x + C\end{aligned}$$

## *Menyelesaikan Masalah Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar*

Integral tak tentu suatu fungsi dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kecepatan (bidang fisika), persamaan garis (geometri), biaya marginal (bidang ekonomi) maupun dalam bidang-bidang lainnya yang telah dibahas pada bab turunan fungsi. Masalah-masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan langkah-langkah berikut.

(i). Merumuskan model matematis dari masalah. Kegiatan yang dilakukan yaitu:
- Mengubah informasi dalam masalah menjadi bentuk variabel (mengidentifikasi dan memberi nama untuk variabel-variabel),
- Menentukan hubungan antar variabel atau komponen dalam masalah,

(ii). Menerapkan konsep, prinsip, maupun aturan pada integral tak tentu pada model matematis yang telah kita rumuskan untuk memperoleh kesimpulan matematis,

(iii). Menafsirkan kesimpulan matematis yang diperoleh sesuai dengan konteks masalah yang diberikan,

(iv). Menguji kebenaran hasil yang diperoleh.

***Contoh 7:***

Tentukan solusi dari masalah-masalah berikut.

1. **Bidang Fisika.**

Sebuah partikel bergerak dari keadaan diam pada titik $x = 10$ dan bergerak sepanjang sumbu $x$ dengan fungsi kecepatan $v(t) = 2t^3 + 10$. Tentukan posisi partikel tersebut pada $t = 2$.

2. **Bidang Geometri.**

Gradien garis singgung suatu kurva ditentukan oleh $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. Jika kurva melalui titik $(0{,}4)$, tentukan persamaan kurva tersebut.

***Penyelesaian Masalah 1:***

1. Untuk menyelesaikan masalah 1, maka digunakan langkah-langkah sebagai berikut.

(i). Merumuskan model matematika.

✍ *Informasi pada masalah diubah menjadi bentuk variabel*

Berdasarkan informasi pada masalah 1 diperoleh:
$v(t)$ =kecepatan awal partikel $= 0$
$S(0) =$ posisi awal benda $= 10$
$v(t) =$ kecepatan benda : $v(t) = 2t^3 + 10$
$S(t) =$ fungsi posisi partikel
$S(2) =$ posisi partikel pada saat $t = 2$

✍ *Menentukan hubungan antar variabel*

Hal yang ditanyakan pada masalah adalah posisi partikel pada saat $t = 2$ ( $s(2)$). Oleh karena itu, perlu ditentukan dahulu fungsi posisi partikel tersebut ( $s(t)$ )

Karena fungsi kecepatan merupakan turunan pertama dari fungsi posisi, maka a fungsi posisi partikel merupakan anti turunan dari fungsi kecepatan. Oleh karena itu, fungsi posisi dari partikel akan ditentukan dengan mengintegralkan fungsi kecepatan. Secara matematis dituliskan sebagai berikut:

$$v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) = \int v(t)dt$$

Karena $v(t) = 2t^3 + 10$, maka integral tak tentu dari $v(t)$ dapat ditentukan dengan menggunakan integral fungsi pangkat, integral hasil kali fungsi dengan konstanta, dan integral jumlah dua fungsi.

(ii). Menerapkan integral fungsi pangkat, integral hasil kali fungsi dengan konstanta, dan integral jumlahan fungsi untuk memperoleh fungsi posisi partikel.

$$\begin{aligned} S(t) = \int v(t)dt \quad &= \int (2t^3 + 10)\,dt \\ &= \int 2t^3\,dt + \int 10\,dt \\ &= 2\int t^3\,dt + 10\int t^0\,dt \\ &= 2\left(\frac{t^{3+1}}{3+1} + C_1\right) + 10\left(\frac{t^{0+1}}{0+1} + C_2\right) \\ &= \frac{1}{2}t^4 + 2C_1 + 10t + 10C_2 = \frac{1}{2}t^4 + 10t + C \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas diperoleh $S(t) = \frac{1}{2}t^4 + 10t + C$. Untuk mendapatkan fungsi posisi partikel, maka nilai $C$ harus ditentukan. Untuk menentukan nilai $C$, digunakan informasi posisi awal partikel $S(0) = 10$.

$$
\begin{aligned}
S(0) = 10 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(0)^4 + 10(0) + C = 10 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 + 0 + C = 10 \\
&\Leftrightarrow \quad C = 10
\end{aligned}
$$

Dengan mensubtitusi $C = 10$, diperoleh $S(t) = \frac{1}{2}t^4 + 10t + 10$, sehingga

$S(2) = \frac{1}{2}(2)^4 + 10(2) + 10 = 8 + 20 + 10 = 38$

(iii). Menafsirkan kesimpulan matematis yang diperoleh sesuai dengan konteks masalah yang diberikan.

Berdasarkan hasil pada (ii), maka diperoleh posisi partikel tersebut pada saat $t = 2$ yaitu $S(2) = 38$.

(iv). Menguji kebenaran hasil yang diperoleh.

Untuk menguji kebenaran hasil yang diperoleh, dapat dilakukan dengan menurunkan kembali fungsi posisi terhadap $t$, yaitu $S'(t) = \frac{1}{2} \times 4t^3 + 10 = 2t^3 + 10$.

***Penyelesaian masalah 2:***

2. Untuk menyelesaikan masalah 2, maka digunakan langkah-langkah sebagai berikut.

(i). Merumuskan model matematika.

✍ *Informasi pada masalah diubah menjadi bentuk variabel*

Informasi pada masalah 2:

$m = \frac{dy}{dx}$ = gradien atau kemiringan garis singgung kurva $= 3x^2$.
$(x_i, y_i)$ = titik yang dilalui kurva $= (0,4)$
$x_i$ = absis titik yang dilalui kurva $= 0$
$y_i$ = ordinat titik yang dilalui kurva $= 4$

✍ *Menentukan hubungan antar variabel*

Hal yang ditanyakan pada masalah adalah persamaan kurva

Karena gradien garis singgung kurva merupakan merupakan turunan pertama dari fungsi atau persamaan kurva, maka persamaan kurva merupakan anti turunan dari fungsi gradien. Oleh karena itu, persmaan kurva akan ditentukan dengan mengintegralkan fungsi gradien kurva tersebut. Secara matematis dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = y' = 3x^2 \;\Rightarrow\; y = \int 3x^2\, dx$$

Karena $\frac{dy}{dx} = y' = 3t^2$, maka integral tak tentu dari $y'$ dapat ditentukan dengan menggunakan integral fungsi pangkat, dan integral hasil kali fungsi dengan konstanta.

(ii). Menerapkan integral fungsi pangkat,dan integral hasil kali fungsi dengan konstanta untuk memperoleh persmaan kurva.

$$\begin{aligned} y = \int 3x^2 dx \quad &= 3\int x^2\, dx \\ &= 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + C\right) \\ &= 3\frac{x^3}{3} + C = x^3 + C \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas diperoleh $y = x^3 + C$. Untuk mendapatkan persamaan kurva yang melalui titik $(0{,}4)$ maka nilai $C$ harus ditentukan. Oleh karena itu, digunakan informasi bahwa $x_i = 0$, dan $y_i = 4$

$$\begin{aligned} y_i = x_i{}^3 + C \quad &\Leftrightarrow \quad 4 = 0^3 + C \\ &\Leftrightarrow \quad C = 4 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $C = 4$, diperoleh $y = x^3 + 4$

(iii). Menafsirkan kesimpulan matematis yang diperoleh sesuai dengan konteks masalah yang diberikan.

Berdasarkan hasil pada (ii), maka persaamaan kurva yang memiliki gradien garis singgung $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ dan melalui titik $(0{,}4)$ adalah $y = x^3 + 4$

(iv). Menguji kebenaran hasil yang diperoleh.

Untuk menguji kebenaran hasil yang diperoleh, dapat dilakukan dengan menurunkan kembali persamaan kurva yang diperoleh, yaitu $y'(x) = 3x^2$.

Sementara itu persamaan $y = x^3 + 4$ juga bernilai benar jika disubstitusi nilai $x = 0$ dan $y = 4$, yaitu: $4 = 0^3 + 4$.

# Daftar Pustaka


Ahmadi, I. K., & Amri, S. (2014). *Pengembangan & model pembelajaran tematik integratif*. Jakarta: Prestasi Pustaka.

Ajai, J. T., & Imoko, B. I. (2014). Gender differences in mathematics achievement and retention scores: a case of problem-based learning method. *International Journal of Research in Education and Science*, *1*(1), 45. https://doi.org/10.21890/ijres.76785

Alexon, & Sukmadinata, N. S. (2010). Pengembangan model pembelajaran terpadu berbasis budaya untuk meningkatkan apresiasi siswa terhadap budaya lokal. *Cakrawala Pendidikan*, *29*(2), 189–203.

Anderson, O. W., & Krathwohl, D. R. (2015). *Kerangka landasan untuk pembelajaran, pengajaran, dan asesmen: Revisi taksonomi pendidikan Bloom. (Terjemahan A. Prihantoro)*. New York, NY: Longman. (Buku asli diterbitkan tahun 2001).

Arends, R. I. (2012). *Learning to Teach. 9th ed*. Retrieved from http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cbdv.200490137/abstract

Arends, R. I., & Kilcher, A. (2010). *Teaching for student learning: Becoming an accomplished teacher*. *Routledge*. https://doi.org/10.4324/9780203866771

Brookhart, S. M. (2010). *How to assess higher-order thinking skills in your classroom*. Alexandria, VA.

Burton, E. (2010). High Level Thinking and Questioning Strategies. Research Brief. *Education Partnerships, Inc.*

Collins, R. (2014). Skills for the 21st Century: teaching higher-order thinking. *Curriculum & Leadership Journal*, *12*(14). Retrieved from http://www.curriculum.edu.au/leader/teaching_higher_order_thinking,37431.html?issueID=12910

Ertmer, P. A., Simons, K. D., & Simons, K. D. (2006). Jumping the PBL Implementation Hurdle : Supporting the Efforts of K – 12 Teachers, *1*(1).

Eggen, P., & Kauchak, D. (2012). *Strategi dan model pembelajaran: Mengajarkan Konten dan keterampilan berpikir (Strategie and models for teachers: Teaching content and thinking skills).* (6th ed.). (S. Wahono, Trans.) Boston: Pearson.

Goethals, P. L. (2013). The pursuit of higher-order thinking in the mathematics classroom. Retrieved from http://www.westpoint.edu/cfe/Literature/-Goethals_13.pdf

Gunter, M. A., Estes, T. H., & Schwab, J. H. (2003). *Instruction: A model approach* (4th ed.). Boston, MA: Pearson Education.

Hopson, M., Sims, R., & Knezek, G. (2001). Using a tecnology enriched environment to improve higher-order thinking skills [Versi Elektronik]. *Journal of Research on Tecnology in Education*, 34(2), 109-119.

Joyce, B., Weil, M., & Calhoun, E. (2009). *Models of teaching*. (A. F. dan A. Mirza, Trans.) (8th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education. Inc.

Larson, R., Hostetler, R., & Edward, B. H. (2008). *Essential calculus: Early trancendental function.* Boston: Houghton Mifflin Company.

Lee, D. (2015). *Using questions to develop students' higher-order thinking skills : a primary english teacher's beliefs and practices.* University of Hong Kong, Pokfulam, Hong Kong SAR. Retrieved from https://goo.gl/fShwvs

Magsino, R. M. (2014). Enhancing Higher Order Thinking Skills in a Marine Biology Class through Problem-Based Learning, *2*(5), 1–6.

Mainali, B. P. (2012). Higher order thinking in education. *Academic Voices: A Multidisciplinary Journal*, *2*(1), 5–10.

Majid, A. (2012). Perencanaan pembelajaran: Mengembangkan standar kompetensi guru. Bandung: PT. Remaja Rosdakarya.

McArdle, G. (2010). *Instructional design for action learning*. New York, NY: American Management Association (AMACOM). https://doi.org/10.1108/EUM00000-00000216

Miri, B., David, B. C., & Uri, Z. (2007). Purposely teaching for the promotion of higher-order thinking skills: A case of critical thinking. *Research in Science Education*, *37*(4), 353–369. https://doi.org/10.1007/s11165-006-9029-2

Mokhtar, M. Z., Tarmizi, M. A. A., Tarmizi, R. A., & Ayub, A. F. M. (2010). Problem-based learning in calculus course: perception, engagement and performance. In *Proceeding of 7th WSEAS International Conference on Engineering Education* (pp. 21–25).

Moore, B., & Stanley, T. (2010). *Critical thinking and formative assessment*. Larchmont, NY: Eye On Education.

Moseley, D., Baumfield, V., Elliott, J., Gregson, M., Higgins, S., Miller, J., & Newton, D. (2005). *Frameworks for thinking - A handbook for teaching and learning*. New York, NY: Cambridge University Press.

Protheroe, N. 2007. What does good math instruction look like? *Principal*, 7(1), pp. 51-54 (online). (https://goo.gl/gBL6iy diakses pada 19 Oktober 2016).

Ramirez, R. P. B., & Ganaden, M. S. (2008). Creative activities and students' higher order thinking skills. *Education Quarterly*, *66*(1), 22–33.

Ramos, J. L. S., Dolipas, B. B., & Villamor, B. B. (2013). Higher order thinking skills and academic performance in physics of college students : a regression analysis. *International Journal of Innovative Interdisciplinary Research*, (4), 48–60.

Retnawati, H. (2015). Hambatan guru matematika Sekolah Menengah Pertama dalam menerapkan kurikulum baru (Teacher's of junior high school in implementation of the new curriculum). *Cakrawala Pendidikan*, *34*(3), 390–403.

Rubin, J., & Rajakaruna, M. (2015). Teaching and assessing higher order thinking in the mathematics classroom with clickers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *10*(1), 37–51. https://doi.org/10.12973/mathedu.-2015.103a

Sastrawati, E., Rusdi, M., & Syamsurizal. (2011). Problem-based learning, strategi metakognisi dan keterampilan berpikir tingkat tinggi siswa. *Tekno-Pedagogi*, *1*(2), 1–14.

Souvieny R. J. (1994). *Learning to teach mathematics* (2nd). New York, NY: Maxwell

Macmillan Canada. Inc

Stewart, J. (2009). *Kalkulus.* (C. Sungkono, Trans.) Jakarta: Salemba Teknika.

Sukino. (2007). *Matematika untuk SMA kelas XI.* Jakarta: Erlangga.

Sumarmo, U., & Nishitani, I. (2010). High Level Mathematical Thinking: Experiments with High School and Under Graduate Students using Various Approaches and Strategies. *Bulletin of the Faculty of Education, Gunma University*, *58*(9), 9–22. Retrieved from https://gair.media.gunma-u.ac.jp/dspace/bitstream/10087/-5130/1/03_Nishitani.pdf

Suprijono, A. (2015). *Cooperative learning*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Tan, O.-S. (2003). *Problem-based learning innovation-using problems to power learning in the 21st century.* Singapore: Cengange Learning.

Tan, O.-S. (2004). *Enhancing Thinking through problem-based learning approaches.* Singapore: Cengange Learning.

Thompson, T. (2008). Mathematics teachers ' interpretation of higher-order thinking in Bloom ' s taxonomy. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *3*(2), 1–14. Retrieved from https://www.researchgate.net-/publication/26579694%0AMathematics

Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2007). *Calculus with Differential Equations* (9th ed.). Prentice Hall: Pearson.

Wirodikromo, S. (2007). *Matematika untuk SMA Kelas XI.* Jakarta: Erlangga.